

100

RESPOSTAS PARA

“SEM PROBLEMAS”

PROFESSOR MAURÍCIO B. DE SOUZA Jr.
ANDERSON W.S. HENRIQUES

PREFÁCIO

A história continua ... Os 100 problemas de dinâmica e controle clássico de processos propostos em "SEM PROBLEMAS" (Imprensa Universitária, UFRRJ, 1994) têm agora suas soluções apresentadas neste "CEM RESPOSTAS".

Espera-se que os exemplos apresentados nestes textos possam esclarecer conceitos e ilustrar procedimentos, contribuindo para que o estudante de "Controle de Processos" da Engenharia Química não fique sem respostas diante de cem problemas de controle.

Finalmente, Maurício B. de Souza Jr. gostaria de agradecer ao Professor Enrique Luis Lima, do Programa de Engenharia Química da COPPE/UFRRJ, pelo continuado apoio e incentivo.

Maurício B. de Souza Jr.
Anderson W.S. Henriques

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO AO CONTROLE DE PROCESSOS	1
2. DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO MATEMÁTICO	3
3. USO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE	10
4. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM	13
5. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE SEGUNDA ORDEM	40
6. SISTEMAS DE ORDEM MAIS ELEVADA	60
7. CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO NEGATIVA ("FEEDBACK")	69
8. ESTABILIDADE DE SISTEMAS "FEEDBACK"	93
9. CRITÉRIOS DE PROJETO E AJUSTE	113
10. ANÁLISE E RESPOSTA DE FREQUÊNCIA DE PROCESSOS LINEARES	139
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146
APÊNDICES	147

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO AO CONTROLE DE PROCESSOS

I.1)

a)

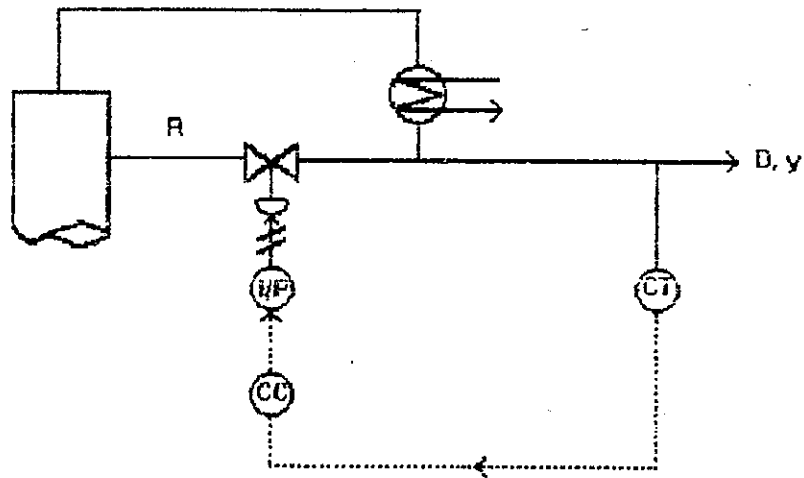


Figura 1a

Onde CT e CC são, respectivamente, sensor/transmissor e controlador "feedback" de composição e I/P é um transdutor de corrente a pressão.

b)

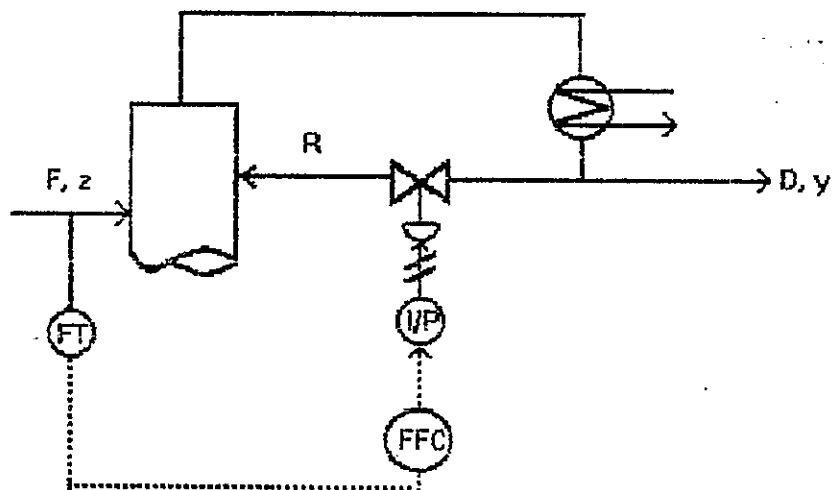


Figura 1.b

Onde FT é um sensor/transmissor de vazão e FFC, um controlador "feedforward".

As sugestões a e b consideram R variável manipulada. Alternativamente, poder-se-ia considerar como variável manipulada B, ou D.

I.2) Para ambos os sistemas, tem-se controle FB ("feedback"); pois a variável controlada é a vazão, a qual é também medida.

I.3)

a) Controle FB, porque a variável controlada (o "peso") é medida e só quando um erro ocorre ("peso" desejado - "peso" medido $\neq 0$), uma ação corretiva é tomada (subsequente ingestão de mais ou menos alimentação).

b) Controle FF, porque a variável controlada (o "peso") não é medida e as perturbações (valor calórico dos alimentos extras) o são. Também antes que o erro ocorra, tenta-se evitá-lo por uma ação corretiva.

c) A estratégia mais adequada é uma combinação de controle FB e FF. "Feedforward" apenas proporcionaria controle perfeito se essa pessoa tivesse um modelo igualmente perfeito do seu metabolismo. Como isso é muito difícil, ação corretiva "FB" é também necessária.



CAPITULO II: DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO MATEMÁTICO

II.1)

a)

Balanço: Entra - Sai = Acúmulo

$$F_1 \rho_1 - F \rho = \frac{d(\rho V)}{dt}$$

Todos os termos da eq. acima têm unidade "lb_m/s".

b)

Dada a reação: A \xrightarrow{k} B

$$r = -kC_A$$

Temos:

Balanço para o componente A: $F_1 C_{A1} - FC_A - kVC_A = \frac{d(C_A V)}{dt}$

Balanço para o componente B: $F_1 C_{B1} - FC_B - V k C_A = \frac{d(C_B V)}{dt}$

c)

Dada as reações: A $\xrightarrow{k_1}$ B $\xrightarrow{k_2}$ C

$$r_A = -k_1 C_A \quad r_B = -k_2 C_B + k_1 C_A \quad r_C = -k_2 C_B$$

Temos:

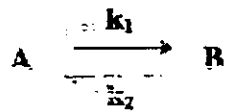
Balanço para o componente A: $F_1 C_{A1} - FC_A - V k_1 C_A = \frac{d(C_A V)}{dt}$

Balanço para o componente B: $F_1 C_{B1} - FC_B - V k_2 C_B + V k_1 C_A = \frac{d(C_B V)}{dt}$

Balanço para o componente C: $F_1 C_{C1} - FC_C + V k_2 C_B = \frac{d(C_C V)}{dt}$

d)

Dada a reação:



$$r_A = -k_1 C_A + k_2 C_B$$

$$r_B = -k_2 C_B + k_1 C_A$$

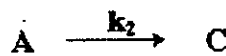
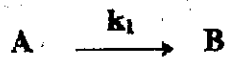
Temos:

$$\text{Balanço para o componente A: } F_1 C_{A1} - F C_A - V k_1 C_A + V k_2 C_B = \frac{d(C_A V)}{dt}$$

$$\text{Balanço para o componente B: } F_1 C_{B1} - F C_B - V k_2 C_B + V k_1 C_A = \frac{d(C_B V)}{dt}$$

e)

Dadas as reações:



$$r_A = -k_1 C_A - k_2 C_A$$

$$r_B = k_1 C_A$$

$$r_C = k_2 C_A$$

Temos:

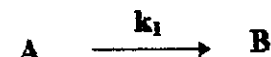
$$\text{Balanço para o componente A: } F_1 C_{A1} - F C_A - V k_1 C_A - V k_2 C_A = \frac{d(C_A V)}{dt}$$

$$\text{Balanço para o componente B: } F_1 C_{B1} - F C_B + V k_1 C_A = \frac{d(C_B V)}{dt}$$

$$\text{Balanço para o componente C: } F_1 C_{C1} - F C_C + V k_2 C_A = \frac{d(C_C V)}{dt}$$

Í.2)

Dadas as reações:



Sabe-se que:

$$r_1 = k_1 C_A^2$$

$$r_2 = k_2 C_A C_B$$

Volume (V) = cte.; Vazão (q) = cte.;
 $C_{Bi} = \text{traços}; C_{Ci} = 0; C_{Ai} = \text{cte.}$

Balço para o componente A: $qC_{Ai} - qC_A - Vk_1C_A^2 - Vk_2C_A C_B = V \frac{dC_A}{dt}$
 ou $\frac{q}{V}(C_{Ai} - C_A) - k_1C_A^2 - k_2C_A C_B = \frac{dC_A}{dt}$ (1)

Balço para o componente B: $qC_{Bi} - qC_B + Vk_1C_A^2 - Vk_2C_A C_B = V \frac{dC_B}{dt}$
 ou $\frac{q}{V}(C_{Bi} - C_B) + k_1C_A^2 - k_2C_A C_B = \frac{dC_B}{dt}$ (2)

Balço para o componente C: $-qC_C + Vk_2C_A C_B = V \frac{dC_C}{dt}$
 ou $-\frac{q}{V}C_C + k_2C_A C_B = \frac{dC_C}{dt}$ (3)

Expressando a variação de C_A , C_B e C_C em função de C_B e C_{Bi} :

-Resolução para C_A :

Derivando a eq 1, obtem-se a seguinte expressão:

$$-\frac{q}{V} \frac{dC_A}{dt} - 2k_1C_A \frac{dC_A}{dt} - k_2C_A \frac{dC_B}{dt} - k_2C_B \frac{dC_A}{dt} = \frac{d^2C_A}{dt^2}$$

Rearranjando a expressão acima temos:

$$\frac{1}{k_2C_A} \left(\frac{q}{V} + 2k_1C_A + k_2C_B \right) \frac{dC_A}{dt} + \frac{1}{k_2C_A} \frac{d^2C_A}{dt^2} = \frac{dC_B}{dt}$$
 (4)

Substituindo a eq. 2 na eq. 4 tem-se:

$$\frac{q}{V}(C_{Bi} - C_B) + k_1C_A^2 - k_2C_A C_B - \frac{1}{k_2C_A} \left(\frac{q}{V} + 2k_1C_A + k_2C_B \right) \frac{dC_A}{dt} = \frac{1}{k_2C_A} \frac{d^2C_A}{dt^2}$$

(4a)

-Resolução para C_B :

A eq.2 já fornece a variação de C_B :

$$\frac{q}{V}(C_{Bi} - C_B) + k_1 C_A^2 - k_2 C_A C_B = \frac{dC_B}{dt}$$

-Resolução para C_C :

Derivando a eq.3, obtem-se:

$$-\frac{q}{V} \frac{dC_C}{dt} + k_2 C_A \frac{dC_B}{dt} + k_2 C_B \frac{dC_A}{dt} = \frac{d^2 C_C}{dt^2}$$

Rearranjando a expressão acima obtem-se:

$$\frac{1}{k_2 C_A} \left(\frac{q}{V} \frac{dC_C}{dt} - k_2 C_B \frac{dC_A}{dt} \right) + \frac{d^2 C_C}{dt^2} = \frac{dC_B}{dt} \quad (5)$$

Substituindo a eq. 2 na eq. 5 tem-se:

$$\frac{1}{k_2 C_A} \left(\frac{q}{V} \frac{dC_C}{dt} - k_2 C_B \frac{dC_A}{dt} \right) + \frac{q}{V} (C_{Bi} - C_B) + k_1 C_A^2 - k_2 C_A C_B = \frac{d^2 C_C}{dt^2}$$

(5a)

Resumindo:

- C_B depende diretamente de C_{Bi} , portanto, o seu modelo é de 1ª ordem e
- C_A e C_C dependem diretamente de C_B e indiretamente de C_{Bi} , portanto, têm modelos de 2ª ordem (equações 4a e 5a, respectivamente)

II.3)

a)

Balanços para o sistema 1 (sem interação):

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_1 - \frac{h_1}{R_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

Balances para o sistema 2 (com interação):

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_1 - \frac{(h_1 - h_2)}{R_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} - \frac{h_2}{R_2}$$

- b) As variáveis de estado para os dois sistemas são h_1 e h_2 .
Para resolver o item a, utilizaram-se os balanços materiais para os tanques 1 e 2.
- c) O modelo mais fácil de ser resolvido é o equivalente ao sistema sem interação (sistema 1), pois as equações do sistema 2 são acopladas e têm que ser resolvidas simultaneamente.

II.4)

Para o tanque 1: $A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_1 + F_5 - \frac{h_1}{R_1}$

Para o tanque 2: $A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_3} - \frac{(h_2 - h_3)}{R_2}$

Para o tanque 3: $A_3 \frac{dh_3}{dt} = \frac{(h_2 - h_3)}{R_2} - F_5$

As variáveis de estado são: h_1 , h_2 e h_3 .

Para desenvolver o modelo matemático utilizaram-se os balanços materiais.

II.5)

Balanco de Energia para o sistema:

$$FC_p(T_i - T_R) - FC_p(T - T_R) - \frac{1}{R}(T - T_R) + H = WC_p \frac{d(T - T_R)}{dt}$$

Sabendo-se que $C_p = 1 \text{ Btu/lb}^\circ\text{F}$ e rearranjando a equação acima, obtem-se a expressão da variação da temperatura com o tempo:

$$\boxed{F(T_i - T) - \frac{1}{R}(T - T_R) + H = W \frac{dT}{dt}}$$

II.6)

- Processo I → não - linear
- Processo II → linear
- Processo III → não - linear

II.7)

Dado o balanço de massa para o componente A (cf. questão II.1.b)

$$F_i C_{Ai} - FC_A - kVC_A = \frac{d(C_A V)}{dt}, \text{ pode-se linearizá-lo conforme segue:}$$

Sabe-se que $V = \text{cte.}$, que $k = k_0 e^{-E/RT}$, e que todas as outras variáveis são funções do tempo(t), então tem-se que:

$$V \frac{dC_A}{dt} = F_i(t)C_{Ai}(t) - F(t)C_A(t) - Vk_0 e^{-E/RT} C_A(t)$$

Linearizando o termo $F_i C_{Ai}$, tem-se a seguinte expressão:

$F_i C_{Ai} \approx F_{i,e} C_{Ai,e} + F_{i,e} (C_{Ai} - C_{Ai,e}) + C_{Ai,e} (F_i - F_{i,e})$, que rearranjada torna-se: $F_i C_{Ai} \approx F_i C_{Ai,e} + F_{i,e} (C_{Ai} - C_{Ai,e})$.

Analogamente, tem-se que: $FC_A \approx FC_{A,e} + F_e (C_A - C_{A,e})$ e

Linearizando o termo kVC_A , tem-se a seguinte expressão:

$$kVC_A \approx k_0 e^{-\frac{E}{RT_0}} C_{A,e} V + k_0 e^{-\frac{E}{RT_0}} (C_A - C_{A,e}) V - k_0 \frac{E}{RT_0^2} e^{-\frac{E}{RT_0}} (T - T_0) V C_{A,e}$$

que rearranjando torna-se: $kVC_A \approx V k_0 e^{-\frac{E}{RT_0}} \left[C_A - \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0) C_{A,e} \right]$.

Substituindo os termos linearizados na equação do balanço de massa, tem-se:

$$V \frac{dC_A}{dt} = F_i C_{Ai,e} + F_{i,e} (C_{Ai} - C_{Ai,e}) - FC_{A,e} - F_e (C_A - C_{A,e}) - \\ - V k_0 e^{-\frac{E}{RT_0}} \left[C_A - \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0) C_{A,e} \right]$$

CAPÍTULO III: USO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

III.1)

Tomando a equação diferencial dada e aplicando Transformada de Laplace à mesma, tem-se que:

$$s^3 \bar{y}'(s) + 5s^2 \bar{y}'(s) + 8s \bar{y}'(s) + 4 \bar{y}'(s) = 2s \bar{x}'(s) + 3 \bar{x}'(s),$$

de onde pode-se obter a expressão que relaciona $\bar{y}'(s)$ e $\bar{x}'(s)$, dada por:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{x}'(s)} = \frac{2s + 3}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}.$$

III.2)

Por definição $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$.

Através da fig. III.2, pode-se escrever que:

$$T'(t) = \begin{cases} \frac{55}{30} t, & 0 \leq t \leq 30 \\ 55, & 30 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

$$\text{Então, } \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{30} \frac{55}{30} e^{-st} t dt + \int_{30}^{\infty} 55 e^{-st} dt.$$

Resolvendo a expressão acima, tem-se que: $\bar{T}'(s) = \frac{55}{30s^2} (1 - e^{-30s})$

III-3)

Dada a função $f'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Kt, & t \geq 0 \end{cases}$

Aplicando Transformada de Laplace, por definição, tem-se que:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} Kt e^{-st} dt.$$

Integrando a expressão anterior, obtem-se: $\bar{f}'(s) = \frac{Ke^{-st}}{s^2}(-st-1) \Big|_0^{\infty}$, ou seja, $\bar{f}'(s) = \frac{K}{s^2}$.

III.4)

Retomando a questão III.2, definindo $T'(t)$, como a diferença entre duas funções rampas de igual inclinação, porém defasadas, tem-se que:

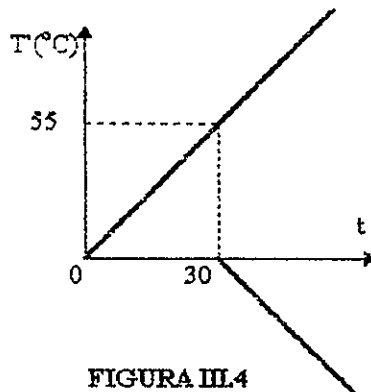


FIGURA III.4

Utilizando a fig.III.4, pode-se escrever que:

$$T'(t) = \begin{cases} \frac{55}{30}t, & 0 \leq t \leq 30 \\ \frac{55}{30}t - \frac{55}{30}(t-30); & 30 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Chamando $f'_1(t) = \frac{55}{30}t$ e utilizando o conceito de tempo morto:

$$T'(t) = f'_1(t) - f'_1(t-30), \quad \forall t$$

Aplicando Transformada de Laplace, obtém-se:

$$\bar{T}'(s) = \bar{F}'_1(s)(1 - e^{-30s}).$$

Como $\bar{F}'_1(s) = \frac{55}{30s^2}$:

$$\bar{T}'(s) = \frac{55}{30s^2}(1 - e^{-30s}).$$

III.5)

Utilizando a fig.III.5 ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

$$C_{A0}'(t) = \begin{cases} 0,1; & 0 \leq t \leq 1 \\ -0,1; & 1 \leq t \leq 2 \\ 0; & 2 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Aplicando a definição de Transformada de Laplace ao sistema obtido, obtem-se a seguinte expressão: $\bar{C}'_{A0}(s) = \int_0^1 0,1e^{-st} dt - \int_1^2 0,1e^{-st} dt + \int_2^{\infty} 0e^{-st} dt$.

Integrando a expressão obtida tem-se: $\bar{C}'_{A0}(s) = \frac{0,1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$.

CAPÍTULO IV: FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE PRIMEIRA ORDEM

IV.1)

Dados:

$$V = 2\text{m}^3; \quad W = 1.000 \text{ kg/h}; \quad \rho = 900 \text{ kg/m}^3;$$

$$C_p = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 1.000 \text{ cal/kg}^\circ\text{C}.$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{W} = 1,8 \text{ h}; \quad K_{p2} = 1^\circ\text{C} \quad K_{p1} = \frac{1}{WC_p} = 10^{-6} \frac{\text{h}^\circ\text{C}}{\text{cal}}$$

a) Balanço de Energia no tanque tipo aquecedor:

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = WC_p(T_i - T) + Q;$$

No E.E. inicial, $\frac{dT}{dt} = 0$; $Q = -WC_p(T_i - T)$; $Q = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{cal}}{\text{h}}$.

b) Admitindo um degrau de 30% na entrada de calor, isto é,
 $\bar{Q}'(s) = \frac{0,9 \cdot 10^7}{s}$.

Utilizando, então, a função de transferência para o processo, dada pela equação que se segue: $\bar{T}'(s) = \frac{K_{p2}}{(\tau_p s + 1)} \bar{T}_i'(s) + \frac{K_{p1}}{(\tau_p s + 1)} \bar{Q}'(s)$, pode-se escrever que:

$$\bar{T}'(s) = \frac{10^{-6}}{(1,8s + 1)} \frac{0,9 \cdot 10^7}{s} = \frac{9}{(1,8s + 1)s}$$

Aplicando o Teorema do Valor Final à equação obtida acima, tem-se que:

$\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \bar{T}'(s)]$, ou seja : $\lim_{t \rightarrow \infty} T'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{9}{(1,8s+1)s} \right]$,
 donde se obtém que $T'(t) = 9 \text{ } ^\circ\text{C}$. Desta forma, o valor final da temperatura será $T = 139 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Sabendo-se que: $\bar{T}'(s) = \frac{9}{(1,8s+1)s}$, para voltar ao domínio do tempo, pode-se expandir a função de transferência obtida em frações parciais:

$$\bar{T}'(s) = \frac{9}{(1,8s+1)s} = \frac{5}{(s+0,55)s} = \frac{C_1}{(s+0,55)} + \frac{C_2}{s}; \quad C_1 = -9; \text{ e } C_2 = 9;$$

E então, aplicar a função inversa da Transformada de Laplace.

Assim, tem-se que $T'(t) = 9(1 - e^{-0,55t})$.

Utilizando a expressão de $T'(t)$ obtida, tendo concluído que $T_f = 139 \text{ } ^\circ\text{C}$, o tempo necessário para o processo alcançar 99% deste valor será $t = 8,3 \text{ h}$.

Alternativamente, pode-se dar a resposta direta: $t = 5\tau_p = 9\text{h}$. No entanto, deve-se ter em mente que, neste caso, a resposta é aproximada, uma vez que para 5 constantes de tempo o processo alcança 99,33% do valor final.

c) Sabendo-se que a resposta do processo ao degrau é dada por: $T'(t) = Kp_2 B \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right)$ e, considerando um degrau de $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ na temperatura de entrada, o tempo necessário para uma mudança de $5 \text{ } ^\circ\text{C}$ na temperatura de saída é dado por:

$$5 = 20(1 - e^{-0,55t}); \quad t = 0,52 \text{ h.}$$

d) Admitindo um degrau de $30 \text{ } ^\circ\text{C}$ na temperatura de entrada e um degrau de 10% na entrada de calor, a resposta do sistema é dada por:

$$T'(t) = 3(1 - e^{-0,55t}) + 30(1 - e^{-0,55t}).$$

Depois de um tempo suficientemente longo, $T'(t) = 33\text{ }^{\circ}\text{C}$, ou seja, $T(t) = 163\text{ }^{\circ}\text{C}$.

IV.2)

Dados:

$$V = 2,4\text{ ft}^3; \quad W = 180\text{ lb/min}; \quad \rho = 62,4\text{ lb/ft}^3; \quad C_p = 0,63\text{ Btu/lb}^{\circ}\text{F}.$$

Supondo:

$$T_{i,e} = 80\text{ }^{\circ}\text{F} \quad \text{e} \quad Q_e = 2.000\text{ Btu/min};$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{W} = 0,832\text{ min}; \quad K_{p2} = 1\text{ }^{\circ}\text{F} \quad K_{p1} = \frac{1}{WC_p} = 0,0174 \frac{\text{min}^{\circ}\text{F}}{\text{Btu}};$$

a) Balanço de Energia no tanque tipo aquecedor:

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = WC_p(T_i - T) + Q_e;$$

$$\text{No E.E. inicial, } \frac{dT}{dt} = 0; \quad T_e = \frac{Q_e}{WC_p} + T_{i,e}; \quad T_e = 114,7\text{ }^{\circ}\text{F}.$$

b) Supondo que o calor cedido ao processo foi a zero, tem-se que

$$\bar{Q}'(s) = \frac{-2.000}{s}$$

A resposta do sistema a esta perturbação será dada por:

$$T'(t) = K_{p1}B \left(1 - e^{-t/\tau_p}\right), \text{ ou seja, } T'(t) = -34,72(1 - e^{-1,21t}).$$

Depois de um longo tempo, $T'(t) = -34,7\text{ }^{\circ}\text{F}$, isto é, $T(t) = 80\text{ }^{\circ}\text{F} = T_i$, como era de se esperar.

c) Para se obter o tempo necessário para que $T'(t)$ alcance 63,21% de seu valor final, isto é $T'(t) = -21,95\text{ }^{\circ}\text{F}$, utiliza-se a expressão de $T'(t)$ obtida em b, concluindo que: $t = \tau_p = 0,832\text{ min}$.

IV.3)

Dados:

$$V = 2,5 \text{ m}^3; \quad \rho = 800 \text{ kg/m}^3; \quad C_p = 1,2 \text{ cal/g}^\circ\text{C} = 1.200 \text{ cal/kg}^\circ\text{C}.$$

$$F = 1,5 \text{ m}^3/\text{h}.$$

$$\text{No E.E. inicial, } T_{i,e} = 90^\circ\text{C} \quad \text{e} \quad T_e = 120^\circ\text{C}.$$

$$F = \frac{W}{\rho}$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{\rho F} = 1,67 \text{ h}; \quad Kp_2 = 1^\circ\text{C};$$

a) Se $Q(t)$ é mantido constante, e $T'(t)$ varia conforme a fig.IV.3 ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

$$T'_i(t) = \begin{cases} 10t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 20, & 2 \leq t \leq \infty \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{T}'(s)}{\bar{T}'_i(s)} = \frac{1}{(1,67s+1)}.$$

Considerando o resultado análogo de III.2, tem-se que:

$$\bar{T}'_i(s) = \frac{10}{s^2} (1 - e^{-2s}).$$

Substituindo a expressão acima na função de transferência do sistema, obtém-se:

$$\bar{T}'(s) = \frac{10(1 - e^{-2s})}{s^2(1,67s+1)}, \quad \text{ou seja, } \bar{T}'(s) = \frac{6}{s^2(s+0,6)} - \frac{6e^{-2s}}{s^2(s+0,6)}.$$

Expandindo em frações parciais o termo sem tempo morto, tem-se:

$$\rightarrow \bar{f}'(s) = \frac{6}{s^2(s+0,6)} = \frac{C_1}{s^2} + \frac{C_2}{s} + \frac{C_3}{(s+0,6)}$$

$$C_1 = 10; \quad C_2 = -16,7; \quad C_3 = 16,7;$$

Voltando ao domínio do tempo:

$$f'(t) = 10t - 16,7 + 16,7e^{-0,6t}$$

A expressão acima fornece a resposta de um sistema de 1ª ordem a uma perturbação do tipo rampa, que pode ser escrita de maneira geral, como segue:

$$f'(t) = K \cdot K_p \left[t - \tau_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \right] \quad \text{eq. IV.3}$$

onde K é a inclinação da reta (perturbação rampa).

Dessa forma:

$$\bar{T}'(s) = \bar{f}'(s) - \bar{f}'(s) e^{-2s}$$

Para $0 \leq t \leq 2$;

$$T'(t) = f'(t) = 10t - 16,7 + 16,7e^{-0,6t}$$

Para $2 \leq t < \infty$;

$$T'(t) = f'(t) - f'(t-2) = 10t - 16,7 + 16,7e^{-0,6t} - 10(t-2) + 16,7 - 16,7e^{-0,6(t-2)}$$

$$\text{ou seja, } T'(t) = 20 - 38,7e^{-0,6t}$$

Depois de um tempo suficientemente longo $T(t) = 140 \text{ }^\circ\text{C}$.

b) Considerando que a temperatura de entrada varia conforme a expressão $T'(t) = 10t$ e, utilizando o resultado obtido no item a, obtém-se a expressão para temperatura de saída em função do tempo, que é dada por: $T(t) = 10t - 16,7(1 - e^{-0,6t})$.

c)

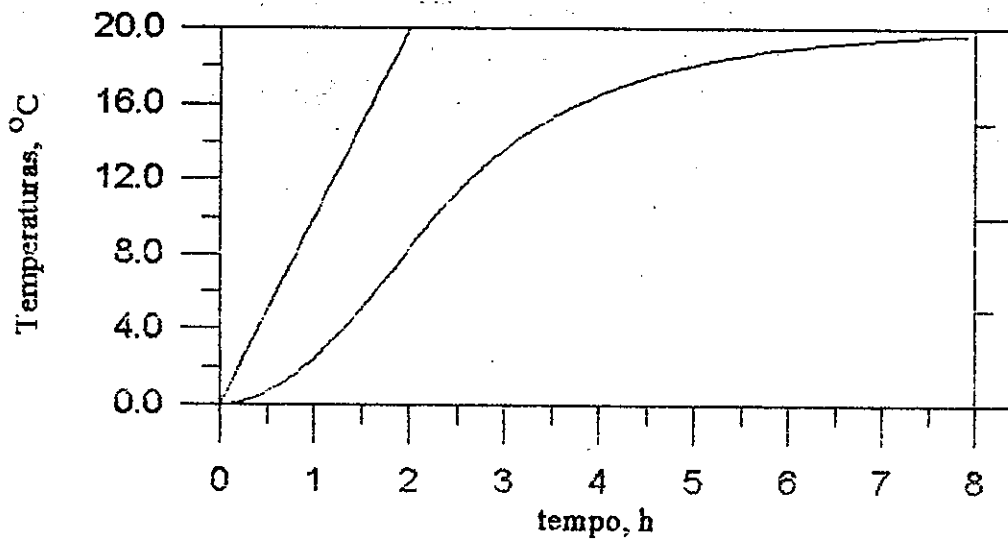


Figura IV.3

IV.4)

Dados:

$$V = 1,6 \text{ m}^3; \quad \rho = 800 \text{ kg/m}^3; \quad C_p = 1.000 \text{ cal/kg}^\circ\text{C}.$$

$$W = 2.400 \text{ kg/h}.$$

$$\text{No E.E. inicial, } T_{1e} = 80^\circ\text{C} \quad \text{e} \quad T_e = 120^\circ\text{C}.$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{W} = 0,53 \text{ h}; \quad K_{p2} = 1^\circ\text{C}; \quad K_{p1} = \frac{1}{WC_p} = 4,17 \cdot 10^{-7} \frac{\text{h}^\circ\text{C}}{\text{cal}};$$

Admitindo um degrau de -16°C na temperatura de entrada, a resposta do processo será dada por: $T'(t) = -16 (1 - e^{-1,875t})$. Depois de um tempo longo a temperatura final estaria com um decréscimo de 16°C , ou seja $T(t) = 104^\circ\text{C}$.

Para compensar esse decréscimo na temperatura de saída, uma perturbação na entrada de calor deve ser tal, que a temperatura na saída sofra um acréscimo de 16°C , fazendo com que a temperatura final volte aos 120°C iniciais.

Considerando a função de transferência $\frac{\bar{T}'(s)}{\bar{Q}'(s)} = \frac{4,17 \cdot 10^{-7}}{(0,53s+1)}$, a resposta a um degrau na entrada de calor será dada por: $T'(t) = K_{p1} B (1 - e^{-t/\tau_p})$.

Substituindo os valores e considerando um tempo suficientemente

longo, explicita-se o valor de B, que é a magnitude do degrau que deve ser aplicado na entrada de calor para compensar as consequências da perturbação na temperatura de entrada do processo: $B = Q'(t) = 3,84 \cdot 10^7 \text{ cal/h}$.

Substituindo os valores estacionários no balanço de energia para o sistema não perturbado, obtém-se o valor de Q no E.E., ou seja:

$$\text{No E.E.}, 0 = WC_p(T_{i,e} - T_e) + Q_e \therefore Q_e = 9,6 \cdot 10^7 \text{ cal/h.}$$

$$Q_e = 9,6 \cdot 10^7 \text{ cal/h} \rightarrow 100\%$$

$$Q = 3,8 \cdot 10^7 \text{ cal/h} \rightarrow X$$

$$X = 40\%$$

Portanto, deve-se aumentar a taxa de calor cedido em 40%.

b) Como as perturbações são simultâneas, o sistema não sai do estado estacionário.

IV.5)

Sabe-se que: Q [Btu/h], W [lb_m/h] e V [ft³] são constantes e que Q_L [Btu/h] varia com a velocidade do vento, de acordo com as expressões abaixo:

$$Q_L = U(t) \cdot A(T - T_a) \quad (1)$$

$$U(t) = U_0 + b \cdot v(t) \quad (2)$$

Para o sistema em questão tem-se o seguinte balanço de energia:

$$\rho VC_p \frac{dT}{dt} = WC_p(T_{i,e} - T) + Q - Q_L \quad (3)$$

Substituindo a eq(2) na eq(1) obtém-se a seguinte expressão:

$$Q_L = [U_0 + b \cdot v(t)] \cdot A(T - T_a) \quad (4)$$

Para se obter a função de transferência entre $\bar{T}'(s)$ e $\bar{v}'(s)$, inicialmente, deve-se linearizar a eq.(4).

Linearizando a expressão de Q_L :

Pode-se rescrever a eq.(4) da seguinte forma:

$$Q_L = U_o [A(T - T_a)] + b v(t) [A(T - T_a)] \quad (4.1)$$

Como apenas v e T são funções do tempo (t), é necessário linearizar somente o segundo termo da eq. 4.1., isto é, o termo $b v(t) [A(T - T_a)]$.

$b v(t) [A(T - T_a)]$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$b A v(t) T - b A v(t) T_a \quad (4.1.a)$$

Linearizando então o produto $v(t) T(t)$, tem-se que:

$$v(t) T(t) \approx T_a (v - v_e) + v_e T$$

Substituindo o termo linearizado na eq.4.1.a e escrevendo em variáveis desvio tem-se:

$$b A [(T_e - T_a) v'(t) + v_e T'(t)] \quad (4.1.b)$$

Substituindo a eq. 4.1.b na eq. 4.1 e escrevendo em variáveis desvio, obtém-se a seguinte expressão:

$$Q'_L = U_o A T'(t) + b A [(T_e - T_a) v'(t) + v_e T'(t)]$$

Substituindo a expressão obtida acima na eq.3 e aplicando Transformada de Laplace, tem-se que:

$$\rho V C_p s \bar{T}'(s) = -W C_p \bar{T}'(s) - U_o A \bar{T}'(s) - b A [(T_e - T_a) \bar{v}'(s) + v_e \bar{T}'(s)] \quad (5)$$

Colocando $\bar{T}'(s)$ e $\bar{v}'(s)$ em evidência, pode-se escrever que:

$$(\rho V C_p s + W C_p + U_o A + b A v_e) \bar{T}'(s) = -b A (T_e - T_a) \bar{v}'(s) \quad (5.1)$$

Assim, utilizando a eq.5.1, pode-se escrever a função de transferência entre $\bar{T}'(s)$ e $\bar{v}'(s)$, que é dada por:

$$\frac{\bar{T}'(s)}{\bar{v}'(s)} = \frac{K_p}{(\tau_p s + 1)}$$

$$\text{Onde: } \tau_p = \left(\frac{\rho V C_p}{W C_p + U_o A + b A v_e} \right) \text{ e } K_p = \left[\frac{-b A (T_e - T_a)}{W C_p + U_o A + b A v_e} \right]$$

IV.6)

Balço de Energia para o sistema (termômetro):

$$M_{Hg} C_{p,Hg} \frac{dT_M}{dt} = h_f A (T - T_M) \quad (1)$$

a, b e c) Para que a leitura do termômetro siga um comportamento de primeira ordem para qualquer mudança na temperatura do fluido ambiente, a seguinte função de transferência deve ser considerada:

$$\frac{\bar{T}'_M(s)}{\bar{T}'(s)} = \frac{K_p}{(\tau_p s + 1)} \quad (2)$$

Fazendo a eq.2 voltar ao domínio do tempo, tem-se que:

$$\frac{dT'_M}{dt} \tau_p + T'_M(t) = K_p T'(t) \quad (3)$$

Comparando a eq.3 com o balanço de energia para o sistema (eq.1), pode-se concluir que o sistema é de 1ª ordem, sendo:

$$\tau_p = \frac{M_{Hg} C_{p,Hg}}{h_f A} \text{ e } K_p = 1.$$

d) Aplicando-se um degrau de magnitude B em $T'(t)$, obtém-se a seguinte resposta:

$$T'_M(t) = B \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \quad \text{Onde: } \frac{1}{\tau_p} = \frac{h_f A}{M_{Hg} C_{p,Hg}}$$

Analisando a resposta do sistema, pode-se concluir que:

Quanto maior o h_f , menor será o τ_p , sendo, conseqüentemente, mais rápida a resposta do sistema à perturbação (cf. figura IV.6.a); o que confirma expectativas físicas, pois quanto maior h_f , menor a resistência à transferência de calor entre o fluido em torno do termômetro e o mercúrio do bulbo.

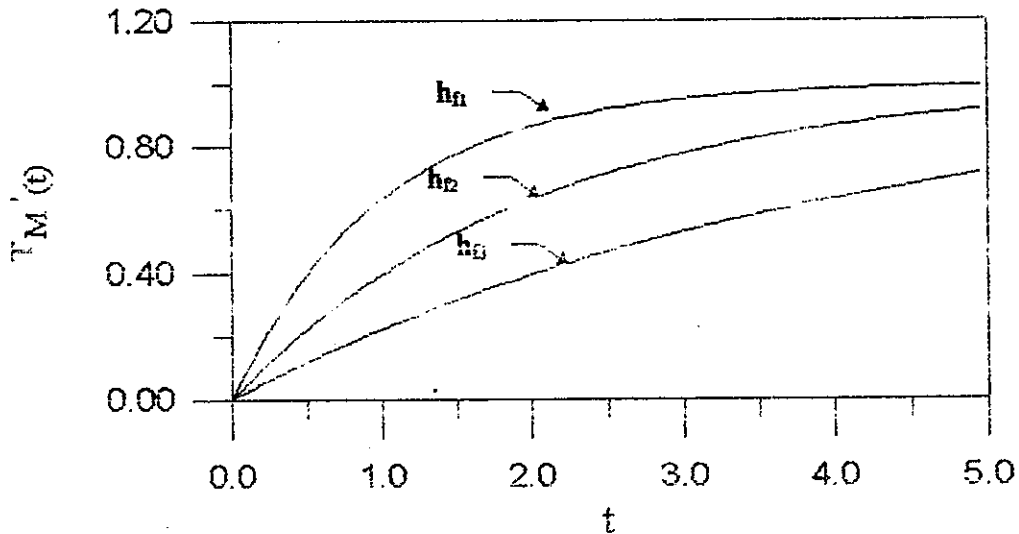


Figura IV.6a

$$h_{f1} > h_{f2} > h_{f3} \quad \tau_{p1} < \tau_{p2} < \tau_{p3}$$

e) Dados: $\tau_p = 1$; $T_e = 100^\circ\text{F}$; $T = 110^\circ\text{F}$, durante 1 min, depois volta ao banho de 100°F ;

Pode-se, então, escrever a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{T}'_M(s)}{\bar{T}'(s)} = \frac{1}{s + 1}$$

Tomando a perturbação, conforme a fig. IV.6.b

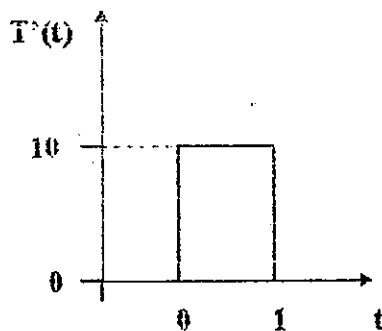


FIGURA IV.6.b

Pode-se considerá-la como sendo a soma de duas perturbações degraus defasadas, conforme segue:

No tempo $t = 0$, o sistema sofre um degrau de magnitude igual a 10, no tempo $t = 1$ min, um degrau de magnitude igual a -10 é aplicado ao sistema, ou seja, um degrau com tempo morto de 1 min. Desta forma, pode-se escrever que: $\bar{T}'(s) = \frac{10}{s}(1 - e^{-s})$.

Assim, $\bar{T}'_M(s) = \frac{10(1 - e^{-s})}{s(s + 1)}$ e, a resposta do sistema à perturbação será

dada por:

$$\text{Para } 0 \leq t \leq 1; \quad T'_M(t) = 10(1 - e^{-t}) \quad (4.a)$$

$$\text{Para } 1 \leq t < \infty; \quad T'_M(t) = 10(1 - e^{-t}) - 10(1 - e^{-(t-1)}), \text{ ou:}$$

$$T'_M(t) = 17,2 e^{-t} \quad (4.b)$$

Em $t = 0,5$ min, utiliza-se a eq. 4.a, obtendo: $T'_M(t) = 3,93$ °F.

Em $t = 2$ min, utiliza-se a eq. 4.b, obtendo: $T'_M(t) = 2,34$ °F.

f) Considerando um termômetro com $\tau_p = 0,2$ min, e que a temperatura do banho cresce linearmente com o tempo, de acordo com a equação: $T'(t) = Kt$; sendo $K = 1$, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\bar{T}'_M(s) = \frac{1}{s^2(0,2s + 1)}$$

Pode-se utilizar o resultado obtido para a resposta a uma perturbação do tipo rampa (cf. eq. IV.3), obtendo-se, então, a seguinte expressão:

$$T'_M(t) = t - 0,2(1 - e^{-5t}) \quad (5)$$

A diferença entre a temperatura indicada e a do banho pode ser calculada da seguinte maneira:

$$T'_M(t) = T_M - T_e \quad (6)$$

$$T'(t) = T - T_e \quad (7)$$

A diferença entre as eq. 6 e 7 fornece: $T - T_M = T'(t) - T'_M(t)$.

Utilizando esse resultado, pode-se concluir que:

i) Utilizando a eq. 5, tem-se que em $t = 0,1$ min, $T'_M(t) = 0,02$. Sabe-se, também, que em $t = 0,1$ min, $T'(t) = 0,1$.

Assim, em $t = 0,1$ min, $T - T_M = 0,08$.

ii) Após 1 min, $T'_M(t) = 0,8$. e $T'(t) = 1$. Então, $T - T_M = 0,2$.

iii) Utilizando a eq.5, $T'_M(t) = t - 0,2(1 - e^{-5t})$, pode-se concluir que, depois de um tempo suficientemente longo, $T'_M(t) = t - 0,2$. Como $T'(t) = t$, tem-se que: $T'_M(t) = T'(t) - 0,2$.

Assim, o desvio máximo entre a temperatura indicada e a do banho é de $0,2^\circ$.

Para se obter o tempo em que o desvio máximo ocorre, deve-se proceder da seguinte forma:

Sabe-se que $T'_M(t) = t - 0,2(1 - e^{-5t})$ e que $T'(t) = t$, então:

$$T'(t) - T'_M(t) = 0,2(1 - e^{-5t}) \quad (8)$$

Considerando que: $T'(t) - T'_M(t) = 0,198$, ou seja, 99% do desvio máximo. e, utilizando a eq.8, tem-se que o desvio máximo ocorre em $t = 0,92$ min.

iv)

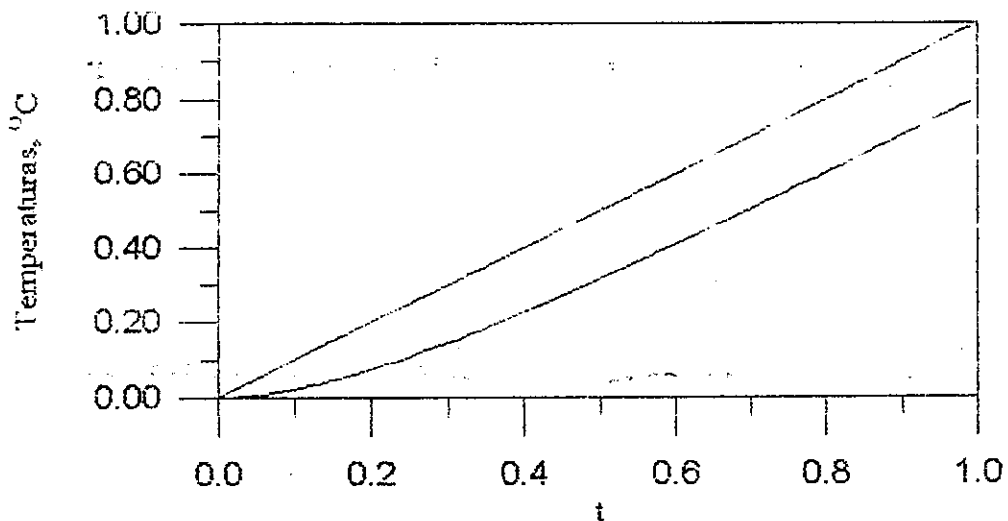


Figura IV.6.c

Após um tempo suficientemente longo, tem-se que: $T'_M(t) = t - 0,2$ e $T'(t) = t$. Assim, pode-se concluir que $T'_M(t)$ estará sempre 0,2 min em atraso em relação a $T'(t)$. Por exemplo, $T'(t) = 10^\circ$, quando $t = 10$ min, porém, $T'_M(t) = 10^\circ$, quando $t = 10,2$ min, ou seja, 0,2 min depois.

IV.7)

Considerando a função de transferência dada:

$$\frac{\bar{C}'(s)}{\bar{C}'_f(s)} = \frac{0,3}{(4s + 1)}$$

Da fig IV.7 ("Sem Problemas"), conclui-se que a perturbação em C_f pode ser considerada como sendo a soma de duas perturbações degraus defasadas e, o mesmo procedimento utilizado em IV.6.e, pode ser usado. Desta forma, tem-se:

$$\bar{C}'_f(s) = \frac{2}{s}(1 - e^{-4s}), \text{ então: } \bar{C}'(s) = \frac{0,6(1 - e^{-4s})}{s(4s + 1)}$$

$$\text{Para } 0 \leq t \leq 4; \quad C'(t) = 0,6(1 - e^{-0,25t})$$

$$\text{Para } 4 \leq t \leq \infty; \quad C'(t) = 0,6(1 - e^{-0,25t}) - 0,6(1 - e^{-0,25(t-4)}), \text{ ou:}$$

$$C'(t) = 1,03 e^{-0,25t}$$

IV.8)

Considerando a função de transferência de 1ª ordem dada por:

$$G(s) = \frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{Kp}{(\tau p s + 1)}$$

a) Utilizando a fig.IV.8.a ("Sem Problemas"), sabendo-se que aplicou-se um degrau unitário em $f'(t)$ (ou seja, $f'(t) = 1$), pode-se concluir que:

$$K_p = 2;$$

Através da fig IV.8.a ("Sem Problemas"), pode-se observar que o valor final da resposta do sistema é $y'(t) = 2$. Sabe-se que a resposta final é dada por $y'(t) = K_p B$. Sendo a magnitude do degrau igual a 1 ($B=1$), tem-se que $K_p = 2$.

$$\tau_p = 0,5;$$

Tempo no qual a reta tangente à curva em $t = 0$ alcança o valor final da resposta do sistema.

b.1) Admitindo os valores obtidos no item a, pode-se escrever a função de transferência a seguir:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{2}{(0,5s + 1)}$$

Através da fig.IV.8.b, tem-se que: $f'(t) = 3t$, ou seja, $\bar{f}'(s) = \frac{3}{s^2}$. Desta forma, pode-se escrever que:

$$\bar{y}'(s) = \frac{6}{s^2(0,5s + 1)}$$

Utilizando a eq.IV.3, obtém-se a resposta do sistema a uma rampa (fig.8.b), dada por:

$$\bar{y}'(t) = 6[t - 0,5(1 - e^{-2t})]$$

b.2)

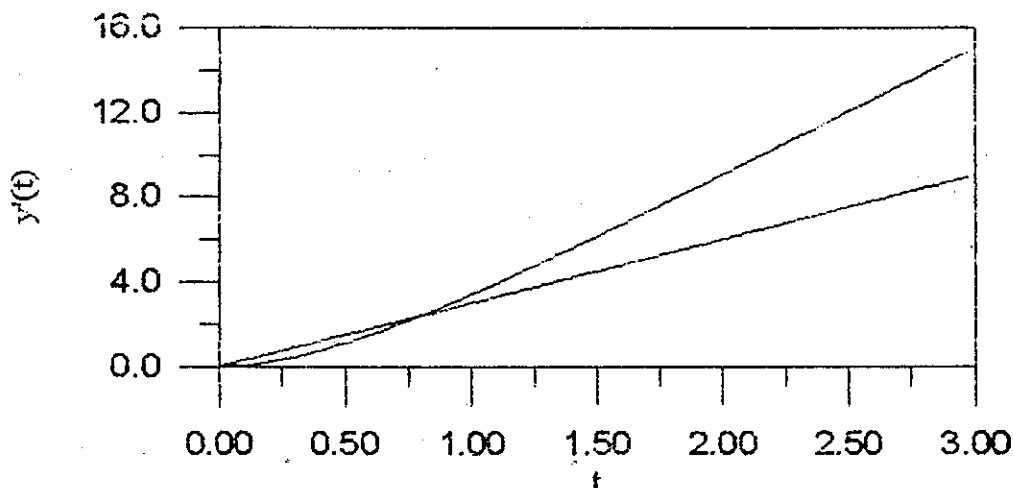


Figura IV.8

IV.9)

Dados: $q_{0,e} = 1 \text{ cfm}$; $h = 1 \text{ ft}$;

Sabe-se que: $q_1 = \frac{h}{R}$; no E.E., $q_0 = q_1$, então, $R = 1 \text{ ft/cfm}$.

Para este sistema, sabe-se que $K_p = R$ e $\tau_p = A R$, assim, a seguinte função de transferência pode ser escrita:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{q'_0(s)} = \frac{R}{(A R s + 1)} \quad (1)$$

A resposta do sistema a um degrau de magnitude B em $q'_0(t)$ é dada por:

$$h'(t) = B R \left(1 - e^{-\frac{t}{AR}} \right) \quad (2)$$

Sabe-se que, se a vazão de entrada fosse duplicada, o nível de líquido aumentaria 0,632 ft em 2 min.

Assim, utilizando-se a eq. 2, pode-se escrever que:

$$0,632 = \left(1 - e^{-\frac{2}{A}} \right), \text{ ou seja, } A = 2 \text{ ft}^2; \tau_p = 2 \text{ min.}$$

Substituindo os valores de τ_p e K_p na função de transferência, obtém-se:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{q'_0(s)} = \frac{1}{(2s + 1)}$$

b) Supondo, agora, que a vazão $q_0(t)$ varia conforme a fig. IV.9.b ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

$$q'_0(t) = \begin{cases} 2t; & 0 \leq t \leq 1 \\ 2; & 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Utilizando o resultado análogo obtido em III.2, pode-se escrever que:

$$\bar{T}(s) = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-s})$$

Assim, tem-se que:

i) Para $0 \leq t \leq 1$;

$$h'(t) = 2[t - 2(1 - e^{-0,5t})]$$

ii) Para $1 \leq t < \infty$;

$$h'(t) = 2[t - 2(1 - e^{-0,5t})] - 2[(t-1) - 2(1 - e^{-0,5(t-1)})]$$

$$\text{ou seja, } h'(t) = 2 - 2,6e^{-0,5t}$$

iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} [h'(t)] = 2$.

IV.10)

Dados: $F_o = 3 \text{ h}$; $A = 10 \text{ ft}^2$;

Sabe-se que, no E.E., $h_e = \frac{1}{2} h_r$ e $F_{i,e} = F_{o,e} = 6 \text{ ft}^3/\text{min}$;

Assim, pode-se proceder os seguintes cálculos:

$$F_o = \frac{h}{R}; \quad F_o = 3h;$$

$$3h = \frac{h}{R} \therefore R = \frac{1}{3} \text{ min/ft}^2;$$

$$F_{o,e} = 3h_e \therefore 6 = 3h_e \therefore h_e = 2 \text{ ft};$$

Para este sistema, sabe-se que $K_p = R$ e $\tau_p = A R$, assim, a seguinte função de transferência pode ser escrita:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_i(s)} = \frac{1/3}{(10/3 s + 1)}$$

A resposta do sistema a um degrau é dada por:

$$h'(t) = \frac{B}{3} (1 - e^{-0,3t})$$

Após um tempo suficientemente longo, $h'(t) = \frac{B}{3}$.

Para transbordar o tanque, o nível de líquido deve ser, no mínimo, o dobro do valor estacionário, ou seja, $h = 2h_e$. Desta forma, tem-se:

$$h'(t) = h - h_e = \frac{B}{3} \quad \therefore 2h_e - h_e = \frac{B}{3} \quad \therefore h_e = \frac{B}{3} \quad \therefore B = 3h_e$$

$$h_e = 2 \text{ ft}; B = 6 \text{ ft}^3/\text{min};$$

Portanto, o valor limite de um degrau na vazão F_i é de $6 \text{ ft}^3/\text{min}$, ou seja, valores maiores provocam o transbordamento do tanque.

IV.11) Dados: $A = 2 \text{ ft}^2$; $h_e = 3 \text{ ft}$; $F_{o,e} = F_{i,e} = 10 \text{ ft}^3/\text{min}$.
Uma perturbação, conforme a fig. IV.11.a, é aplicada ao sistema.

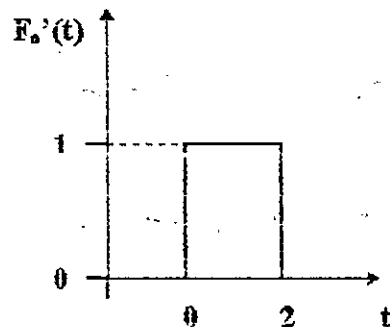


FIGURA IV.11.a

Procedendo da mesma forma que em IV.6.e, pode-se escrever que:

$$\bar{F}'_o(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) \quad (1)$$

Para o sistema, tem-se:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_o(s)} = \frac{1}{As} \quad (2)$$

Substituindo a eq.1 na eq.2, obtém-se a seguinte expressão:

$$\bar{h}'(s) = \frac{(1 - e^{-2s})}{2s^2} \quad (3)$$

Fazendo a eq.3 voltar ao domínio do tempo, pode-se escrever:

$$\text{Para } 0 \leq t \leq 2; \quad h'(t) = \frac{1}{2}t$$

$$\text{Para } 2 \leq t < \infty; \quad h'(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}(t-2), \text{ ou seja, } h'(t) = 1 \text{ ft.}$$

Plotando, então um gráfico $h(t)$ vs. t , tem-se:

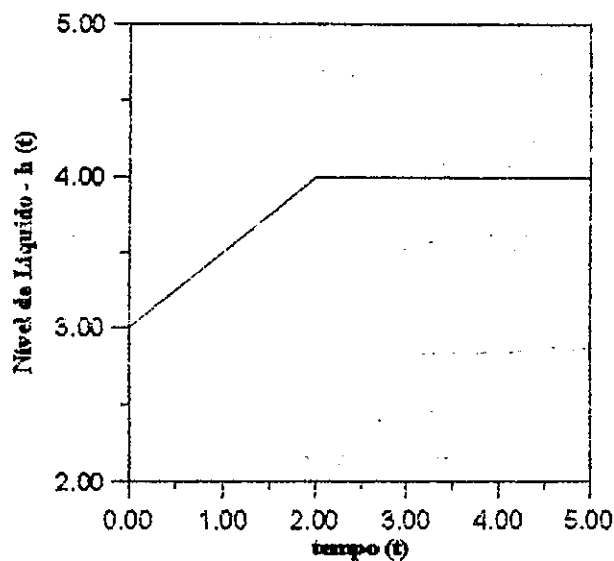


FIGURA IV.11.b

IV.12)

Dados: diâmetro dos tanques: $\phi = 4$ ft;

Sistema 1: $F_1 = \frac{h}{R}$ ($R = 0,90$ min / ft²);

Sistema 2: $F_1 = \text{cte.}$

$h_e = 6$ ft; $F_{o,e} = 6,67$ ft³/min;

Em $t = 0$, o fluxo de entrada muda repentinamente de 6,67 para 9,36 ft³.

Para o Sistema 1, tem-se:

$$A = \frac{\pi\phi^2}{4} = 12,57 \text{ ft}^2; \quad K_p = 0,90; \quad \tau_p = 11,3 \text{ min};$$

A magnitude do degrau no fluxo de entrada é $B = 2,69$.

Assim, para este sistema:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_o(s)} = \frac{0,9}{(11,3 s + 1)} \quad (1)$$

E a resposta do sistema a um degrau é dada por:

$$h'(t) = 2,43 (1 - e^{-0,09t}) \quad (2)$$

Para o Sistema 2, tem-se:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_o(s)} = \frac{1}{A s}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_o(s)} = \frac{1}{12,57 s} \quad (3)$$

E a resposta do sistema a um degrau é dada por:

$$h'(t) = 0,21t \quad (4)$$

Sabe-se que cada tanque tem 8 ft de altura, ou seja, para o tanque transbordar $h(t) \geq 8$ ft, isto é, $h'(t) \geq 2$ ft. ($h' = h' - h_0 = 8 - 6 = 2$)

Utilizando a eq.2, conclui-se que para o Sistema 1, quando $h'(t) = 2$ ft, $t = 19,2$ min.

Utilizando a eq.4, conclui-se que para o Sistema 2, quando $h'(t) = 2$ ft, $t = 9,5$ min.

Portanto, o Sistema 2 transborda primeiro e, em 9,5 minutos.

IV.13)

Dados: diâmetro do tanque: $\phi = 5$ ft;
capacidade máxima: $h_t = 10$ ft;

$$F_2(t) = 8.000[h(t)]^{0,7}, \text{ medida em gal/h;}$$

$$F_{1,e} = 20.000 \text{ gal/h;}$$

No E.E., $F_{1,e} = F_{2,e}$. Assim, $20.000 = 8.000h(t)^{0,7} \therefore h_c = 3,7$ ft.

Para o sistema em questão, tem-se o seguinte balanço material:

$$A \frac{dh}{dt} = F_1(t) - F_2(t) \quad (1)$$

Para se obter a função de transferência do sistema, tem-se, primeiramente, que linearizar o termo $h(t)^{0,7}$.

Linearizando $h(t)^{0,7}$:

$$h^{0,7} \approx h_e^{0,7} + 0,7 h_e^{-0,3} (h - h_e);$$

Substituindo o valor de h_e , obtem-se:

$$h^{0,7} \approx 2,5 + 0,47(h - 3,7) \quad (2)$$

Substituindo a eq.2 na eq.1, substituindo os valores de A e $F_2(t)$ e, admitindo que $1 \text{ gal/h} = 0,1337 \text{ ft}^3/\text{h}$, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\frac{19,63}{0,1337} \frac{dh}{dt} = F_1(t) - 20.000 - 3.782 (h - 3,7) \quad (3)$$

Escrevendo a eq.3 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se que:

$$146,8 \text{ s } \bar{h}'(s) = \bar{F}'_1(s) - 3.782 \bar{h}'(s) \quad (4)$$

Da eq.4, obtem-se:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{2,6 \times 10^{-4}}{(0,04 \text{ s} + 1)} \quad (5)$$

Em $t = 0$, uma perturbação é aplicada à vazão de alimentação, conforme a figura IV.13.

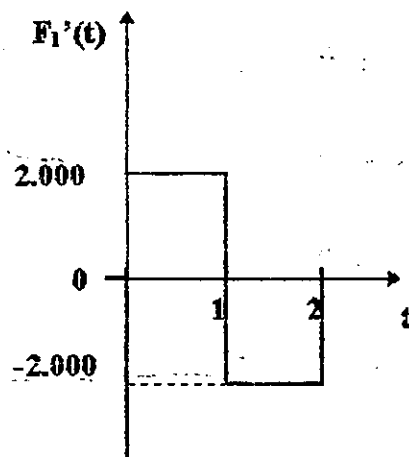


FIGURA IV.13

Assim, pode-se escrever que:

$$F_1'(t) = \begin{cases} 2.000; & 0 \leq t \leq 1 \\ -2.000; & 1 \leq t \leq 2 \\ 0; & 2 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Aplicando Transformada de Laplace ao sistema obtem-se:

$$\bar{F}_1'(s) = \frac{2.000}{s} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \quad (6)$$

Substituindo a eq.6 na eq.5, tem-se:

$$\bar{h}'(s) = \frac{0,5(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})}{s(0,04s + 1)} \quad (7)$$

a) A resposta do sistema à perturbação descrita pela fig.IV.13. é dada por:

i) Para $0 \leq t \leq 1$;

$$h(t) = 3,7 + 0,5 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,04}} \right)$$

ii) Para $1 \leq t \leq 2$;

$$h(t) = 3,7 + 0,5 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,04}} \right) - \left(1 - e^{-\frac{(t-1)}{0,04}} \right)$$

iii) Para $2 \leq t \leq \infty$;

$$h(t) = 3,7 + 0,5 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,04}} \right) - \left(1 - e^{-\frac{(t-1)}{0,04}} \right) + 0,5 \left(1 - e^{-\frac{(t-2)}{0,04}} \right)$$

iv) $\lim_{t \rightarrow \infty} [h(t)] = 3,7 \text{ ft.}$

b) Se as perturbações tivessem sido de 1%, a resposta encontrada seria mais realista, ou seja, mais acurada quando comparada a verdadeira, pois o proble-

ma estaria sendo resolvido mais próximo ao estado estacionário, sendo o erro da expansão em série (linearização) menos significativo.

IV.14)

Dados: $A = 10 \text{ ft}^2$; $F_{i,e} = 10 \text{ ft}^3/\text{min}$;

$$F_o = 4 h^{\frac{1}{2}};$$

No E.E., $F_{o,e} = F_{i,e}$. Assim, $10 = 4h_e^{\frac{1}{2}} \therefore h_e = 6,25 \text{ ft}$.

Para o sistema em questão, tem-se o seguinte balanço material:

$$A \frac{dh}{dt} = F_i(t) - 4h^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Para se obter a função de transferência do sistema, tem-se, primeiramente, que linearizar o termo $h^{\frac{1}{2}}$.

Linearizando $h^{\frac{1}{2}}$:

$$h^{\frac{1}{2}} \approx h_e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} h_e^{-\frac{1}{2}}(h - h_e);$$

Substituindo o valor de h_e , obtem-se:

$$h^{\frac{1}{2}} \approx 1,25 + 0,2h \quad (2)$$

Substituindo a eq.2 na eq.1 e, substituindo os valores de A e $F_o(t)$, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$10 \frac{dh}{dt} = F_i(t) - 5 - 0,8h(t) \quad (3)$$

Escrevendo a eq.3 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se que:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_i(s)} = \frac{1,25}{(12,5s + 1)} \quad (4)$$

Admitindo que a perturbação no fluxo volumétrico de entrada seja um pulso, conforme a figura IV.14

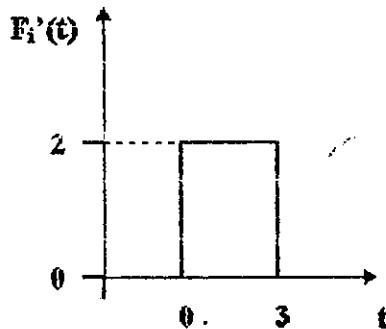


FIGURA IV.14

A figura IV.14 pode ser interpretada da seguinte forma:

$$\bar{F}'_i(s) = \frac{2}{s}(1 - e^{-3s}) \quad (5)$$

Substituindo a eq.5 na eq.6, tem-se:

$$\bar{h}'(s) = \frac{2,5(1 - e^{-3s})}{s(12,5s + 1)} \quad (6)$$

A resposta do sistema à perturbação descrita pela fig.IV.14, é dada por:

Para $0 \leq t \leq 3$;

$$h(t) = 6,25 + 2,5(1 - e^{-0,08t}) \quad (7)$$

Para $3 \leq t \leq \infty$;

$$h(t) = 6,25 + 2,5(1 - e^{-0,08t}) - 2,5(1 - e^{-0,08(t-3)}), \text{ ou seja,}$$

$$h(t) = 6,25 + 0,68e^{-0,08t} \quad (8)$$

Utilizando as eq. 6 e 7, pode-se concluir que:

$$h(t = 1,5) = 6,53 \text{ ft};$$

$$h(t = 3) = 6,78 \text{ ft};$$

$$h(t = 4) = 6,74 \text{ ft};$$

Para que o tanque transborde, $h(t)$ deve ser maior que 10 ft^3 . Analisando a eq. 6, pode-se observar que $h'(t)$ tem seu valor máximo em $h'(t) = 0,53 \text{ ft}$, ou seja, $h(t) = 6,78 \text{ ft}$ em $t = 3 \text{ min}$, desse tempo em diante o sistema tende ao estado estacionário inicial, portanto a perturbação não provoca o transbordamento do tanque.

IV.15)

Dados: $F = 100 \text{ ft}^3/\text{h}; \quad V = 1.000 \text{ ft}^3; \quad k = 1,2 \text{ ft}^3/\text{lbmol h};$
 $C_{A0,e} = 1 \text{ lbmol}/\text{ft}^3;$

Dada a expressão do balanço de massa para o componente A (cf. eq. 1, pb IV.15 - "SEM PROBLEMAS"), substituindo, então, os valores correspondentes, pode-se escrever:

$$1.000 \frac{dC_{A1}}{dt} = 100(C_{A0} - C_{A1}) - 1.200C_{A1}^2 \quad (1)$$

a) No E.E., tem-se que:

$$0 = 100(1 - C_{A1,e}) - 1.200C_{A1,e}^2 \text{ ou,}$$

$$1.200C_{A1,e}^2 + 100C_{A1,e} - 100 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau obtida acima, tem-se que a única solução com significado físico é $C_{A1,e} = 0,25 \text{ lbmol}/\text{ft}^3$.

b) Linearizando C_{A1}^2 :

$$C_{A1}^2 \approx C_{A1,e}^2 + 2C_{A1,e}(C_{A1} - C_{A1,e});$$

Substituindo o valor de $C_{A1,e}$, obtem-se:

$$C_{A1}^2 \approx 0,5C_{A1} - 0,0625 \quad (2)$$

Substituindo a eq.2 na eq.1 e, escrevendo em variáveis desvio, tem-se:

$$\frac{dC'_{A1}}{dt} = 0,1C'_{A0}(t) - 0,7C'_{A1}(t) \quad (3)$$

c) Aplicando Transformada de Laplace à eq. 3, obtem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{C}'_{A1}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)} = \frac{0,14}{(1,43s + 1)} \quad (4)$$

Onde: $K_p = 0,14$ e $\tau_p = 1,43$.

d) Utilizando o resultado da questão III.5, tem-se:

$$\bar{C}'_{A0}(s) = \frac{0,1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

Substituindo a expressão acima na eq.4, obtem-se:

$$\bar{C}'_{A1}(s) = \frac{0,014(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})}{s(1,43s + 1)} \quad (6)$$

A resposta do sistema à perturbação aplicada é dada por:

i) Para $0 \leq t \leq 1$;

$$C'_{A1}(t) = 0,014(1 - e^{-0,71t})$$

ii) Para $1 \leq t \leq 2$;

$$C'_{A1}(t) = 0,014(1 - e^{-0,71t}) - 0,028(1 - e^{-0,71(t-1)}) \quad , \text{ ou seja,}$$

$$C'_{A1}(t) = -0,014 + 0,042e^{-0,71t}$$

iii) Para $2 \leq t < \infty$;

$$C'_{A1}(t) = 0,014(1 - e^{-0,7t}) - 0,028(1 - e^{-0,7(t-1)}) + 0,014(1 - e^{-0,7(t-2)})$$

ou seja,

$$C'_{A1}(t) = -0,014e^{-0,7t}$$

**CAPÍTULO V: FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA DE SEGUNDA
ORDEM**

V.1)

Sabe-se que: $F_1 = \frac{h_1}{R_1}; \quad F_2 = \frac{h_2}{R_2};$

Se $F_{1,e}$ (ft³/min) for plotado contra $h_{1,e}$ (ft) será obtida uma reta com coeficiente angular $\left(\frac{dF_{1,e}}{dh_{1,e}}\right) = 1,5 \text{ ft}^2 / \text{min};$

O sistema é criticamente amortecido, isto é, $\xi = 1$ e $A = 4 \text{ ft}^2;$

$$F_{1,e} = 1,5h_{1,e} \therefore \frac{h_{1,e}}{F_{1,e}} = R_1 = 0,67 \text{ ft} / \text{cfm}$$

$$\tau p_1 = A R_1 = 2,67 \text{ min};$$

$$K_p = R_1 = 0,67 \text{ ft}/\text{cfm};$$

Como o sistema é criticamente amortecido, $\tau p_1 = \tau p_2.$

Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,67}{(2,67 s + 1)^2}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,67}{(7,12 s^2 + 5,34 s + 1)}$$

V.2)

Dados: $R_1 = R_2 = 1 \text{ ft}/\text{cfm}; \quad R_o = 2 \text{ ft}/\text{cfm}; \quad A_1 = A_2 = 1 \text{ ft}^2;$

Para o tanque 1, tem-se:

$$\text{Balanço: } A_1 \frac{dh'_1}{dt} = q'(t) - \frac{h'_1}{R_o} - \frac{h'_1}{R_1} \quad (1)$$

Substituindo os valores dados e aplicando Transformada de Laplace na eq.1, obtem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{h}'_1(s)}{\bar{q}'(s)} = \frac{0,67}{(0,67s + 1)} \quad (2)$$

Da mesma forma, para o tanque 2, tem-se:

$$\text{Balanço: } A_2 \frac{dh'_2}{dt} = \frac{h'_1}{R_1} - \frac{h'_2}{R_2} \quad (3)$$

Substituindo os valores dados e aplicando Transformada de Laplace na eq.3, obtem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{h}'_1(s)} = \frac{1}{(s+1)} \quad (4)$$

Para se obter a função de transferência $\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{q}'(s)}$, basta multiplicar as equações 2 e 4, conforme segue:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{q}'(s)} = \frac{\bar{h}'_1(s)}{\bar{q}'(s)} \times \frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{h}'_1(s)} = \frac{0,67}{(s+1)(0,67s+1)}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{q}'(s)} = \frac{0,67}{(0,67s^2 + 1,67s + 1)} \quad (5)$$

A eq.5 pode ser escrita de forma geral como segue:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{K_p}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} \quad \text{eq.V.2}$$

Utilizando a eq.V.2, pode-se escrever que, para o sistema em questão tem-se que:

$$\tau = \sqrt{0,67} = 0,82 \text{ min;}$$

$$\xi = \frac{1,67}{2 \times 0,67} = 1,02;$$

V.3)

Dados:

Sistema com 2 tanques (Projeto Original):

diâmetro dos tanques: $\phi = 3$ ft;

capacidade máxima: $h_t = 5$ ft;

$$F_{1,e} = 100 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{0,13368 \text{ft}^3}{\text{gal}} = 13,4 \text{ ft}^3 / \text{min};$$

Sistema com 1 tanque (Projeto Modificado):

diâmetro do tanque: $\phi = 4$ ft;

O volume do tanque desse sistema é a soma dos volumes dos dois tanques do sistema anterior, isto é, $V = V_1 + V_2$;

$$h_e = \frac{1}{2} h_t;$$

Resolvendo o Projeto Original tem-se:

$$A = \frac{\pi \phi^2}{4} = 7,07 \text{ ft}^2;$$

Pode-se supor que no estado estacionário inicial, cada tanque está cheio pela metade, então: $h_{1,e} = h_{2,e} = 2,5$ ft.

No E.E., $F_{1,e} = F_{1,e} = F_{2,e}$. Assim:

$$F_{1,e} = \frac{h_{1,e}}{R_1} = \frac{h_{2,e}}{R_2} \therefore R_1 = R_2 = \frac{2,5}{13,4} = 0,19 \text{ ft} / \text{cfm};$$

$$\tau p_1 = \tau p_2 = A R_1 = 1,32 \text{ min};$$

$$K_p = R_1 = 0,186 \text{ ft/cfm};$$

Utilizando as *eq.c5* e *c6*, para este sistema tem-se que: $\tau = 1,32$ min e $\xi = 1$.

Utilizando a eq. V.2, e os valores obtidos anteriormente, pode-se escrever que:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,186}{(1,74 s^2 + 2,64 s + 1)} \quad (1)$$

Resolvendo, então, o Projeto Modificado, tem-se:

Sabe-se que $V = V_1 + V_2 = A_1 h_1 + A_2 h_2 = 70,7 \text{ ft}^3$.

Para este sistema, $A = 12,57 \text{ ft}^2$.

Como $V = A h_T$, $h_T = \frac{70,7}{12,57} = 5,63 \text{ ft}$.

Pode-se, da mesma forma, supor que no estado estacionário inicial, o tanque está cheio pela metade, então: $h_e = 2,81 \text{ ft}$.

$$F_{1,e} = \frac{h_e}{R} \quad \therefore R = 0,21 \text{ ft / cfm};$$

$$\tau_p = A R = 2,64 \text{ min};$$

$$K_p = R = 0,21 \text{ ft/cfm};$$

Pode-se, então escrever a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,21}{(2,64 s + 1)} \quad (2)$$

a) Aplicando-se o Teorema do Valor Final às funções de transferência dadas pelas equações 1 e 2, para um degrau de magnitude B em $F'_1(t)$, tem-se:

1- Projeto Original

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h'(t)] = 0,186 B;$$

Para que os tanques transbordem, $h'(t) > 2,5$ ft. Assim, utilizando a equação acima, obtém-se a maior perturbação que o sistema de dois tanques pode sofrer em F_1 , que é dada por $B = 13,4$ ft³/min.

2- Projeto Modificado

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h'(t)] = 0,21 B;$$

Para que os tanques transbordem, $h'(t) > 2,81$ ft. Assim, utilizando a equação acima, obtém-se a maior perturbação que o sistema de um tanque pode sofrer em F_1 , que é dada por $B = 13,4$ ft³/min.

Então, pode-se concluir que o dois sistemas são capazes de suportar perturbações de até 100 gal/min em F_1 , sem que ocorra o transbordamento dos mesmos.

b) O sistema original prover melhor amortecimento de perturbações de graus em F_1 , já que se trata de um sistema de segunda ordem, enquanto que o sistema modificado é de primeira ordem.

V.4)

Dada a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{Y}'(s)}{\bar{X}'(s)} = \frac{18}{s^2 + 3s + 9} \quad (1)$$

a) Rescrevendo a eq. 1, conforme segue:

$$\frac{\bar{Y}'(s)}{\bar{X}'(s)} = \frac{2}{(0,11s^2 + 0,33s + 1)} \quad (1.a)$$

Sabe-se que a resposta do sistema a um degrau de magnitude B, depois de um tempo suficientemente longo, é dada por: $Y'(t) = K_p B$.

Considerando, então, um degrau dado por: $\bar{X}'(s) = \frac{3}{s}$, o novo valor do estado estacionário de $Y'(t)$ é dado por: $Y'(t) = 2 \times 3 = 6$.

b) Comparando a eq.1.a com a eq.V.2, pode-se escrever, que para este sistema tem-se que: $\tau = 0,33$ e $\xi = 0,5$.

Sabe-se que o valor do "overshoot" (OS) é dado pela eq.c7. Assim, para este sistema, $OS = 0,16$.

Supondo, que por razões físicas, exige-se que $Y' \leq 10$, para se obter o valor da maior mudança degrau em X' que o processo pode tolerar sem exceder este limite, pode-se proceder da seguinte maneira:

Utilizando a fig.A2 tem-se que: $OS = \frac{A}{B K_p}$.

O valor do 1º máximo da curva referente à resposta do sistema oscilatório ao degrau é dado por:

$$Y'_{\text{má } x} = A + BK_p, \text{ ou seja, } Y'_{\text{má } x} = BK_p(OS + 1).$$

Assim, utilizando o resultado anterior, tem-se que:

$$10 = B \times 2(0,16 + 1) \therefore B = 4,3.$$

Portanto o maior degrau que se pode aplicar em X' tem magnitude 4,3.

V.5)

Rearrumando a função de transferência dada, tem-se que:

$$\frac{\bar{Y}'(s)}{\bar{X}'(s)} = \frac{20}{4s^2 + 0,6s + 1} \quad (1)$$

Comparando a eq. 1 à eq.V.2, pode-se escrever que, para este sistemati-
zem-se que $\tau = 2$ e $\xi = 0,15$.

Considera-se, então, um degrau dado por: $\bar{X}'(s) = \frac{3}{s}$.

Utilizando a eq.c7, tem-se que OS = 0,62.

Sabe-se que: $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$. Sendo o valor final da resposta de
um sistema de 2ª ordem a um degrau B, dado por $Y'(t) = K_p B$, ou seja,
 $Y'(t) = 60$, o valor excedente é igual 37,25.

O valor máximo de $Y'(t)$ é dado por:

$$Y'_{\text{máx}} = \text{valor excedente} + \text{valor final} = 97,25.$$

O tempo no qual este valor máximo ocorre pode ser obtido da seguinte
maneira:

Utilizando as eq.c5 e c6, conclui-se que: $T_a = 3,51$ e $T = 12,82$.

Analisando a resposta do sistema a um degrau (figA2), tem-se que, o
tempo em que ocorre o valor máximo de $Y'(t)$ é aproximadamente:

$$t_{\text{máx}} \approx T_a + \frac{1}{4} T$$

Assim, o tempo em que ocorre o valor máximo de $Y'(t)$ é aproximada-
mente $t = 6,7$. O valor exato pode ser obtido pela resolução numérica da eq.a3
para os parâmetros deste sistema.

V.6)

Dados: $V_1 = V_2 = 6 \text{ ft}^3$; $F = 3 \text{ ft}^3/\text{min}$;

Supondo que $C_{0,e} = C_{1,e} = C_{2,e} = 0$;

Aplicando o balanço de massa de sal no tanque 1, tem-se que:

$$V \frac{dC_1}{dt} = F(C_0 - C_1) \quad (1)$$

Substituindo os valores dados, colocando em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à eq. 1, obtém-se:

$$\frac{\bar{C}'_1(s)}{\bar{C}'_0(s)} = \frac{1}{(2s+1)} \quad (2)$$

Analogamente, para o tanque 2 tem-se que:

$$\frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_1(s)} = \frac{1}{(2s+1)} \quad (3)$$

O produto das equações 2 e 3 fornece a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_0(s)} = \frac{1}{(2s+1)^2} \quad (4)$$

Sabe-se que para este sistema $\tau = 2$ e $\xi = 1$, ou seja, o sistema é criticamente amortecido. Utilizando, então a eq. a2, tem-se que:

$$C'_2(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

Substituindo o valor de $C'_2(t) = 0,6 \text{ lb}_m \text{ de sal/ft}^3$ na eq.5, obtém-se:

$$0,4 = \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5a)$$

Utilizando a eq.5a, pode-se obter o tempo em que $C'_2(t) = 0,6 \text{ lb}_m \text{ de sal/ft}^3$, através do método de tentativa e erro.

A primeira tentativa pode ser feita utilizando-se a *fig A1*. Analisando a curva com $\xi = 1$, observa-se que para $\frac{Y'(t)}{K_p B} = 0,6$, tem-se $\frac{t}{\tau} = 2$. Assim, obtém-se:

tentativa	t/τ	L.E.	L.D.
1ª	2	0,4	0,406

Onde L.E. e L.D. correspondem, respectivamente, ao lado esquerdo e direito da eq.5a.

Assim, o tempo no qual a concentração de sal no tanque 2 alcança 0,6 lb_m de sal/ft³ é igual a 4 min.

V.7)

Dados:

$$V_1 = V_2 = 5 \text{ ft}^3; \quad W = 250 \text{ lb}_m/\text{min}; \quad \rho = 50 \text{ lb}_m/\text{ft}^3;$$

$$C_p = 1 \text{ Btu}/\text{lb}_m^\circ\text{F}.$$

$$a) \quad \tau_{p1} = \tau_{p2} = \frac{\rho V}{W} = 1 \text{ min}; \quad K_p = \frac{1}{WC_p} = 0,004 \frac{\text{min}^\circ\text{F}}{\text{Btu}};$$

Admitindo um degrau de 1.000 Btu/min na entrada de calor, e um degrau de -8°F na temperatura de entrada da água, tem-se:

Tanque 1:

$$\frac{\bar{T}_1'(s)}{\bar{T}_i'(s)} = \frac{1}{(s+1)} \quad (1)$$

E a resposta do sistema à perturbação é dada por:

$$T_1(t) = 60 - 8(1 - e^{-t}) \quad (2)$$

Depois de um tempo suficientemente longo, $T_1(t) = 52^\circ\text{F}$.

Tanque 2:

$$\bar{T}_2'(s) = \frac{1}{(s+1)} \bar{T}_1'(s) + \frac{0,004}{(s+1)} \bar{Q}'(s) \quad (3)$$

Substituindo a eq.1 na eq.3, obtém-se:

$$\bar{T}_2'(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \bar{T}_i'(s) + \frac{0,004}{(s+1)} \bar{Q}'(s) \quad (4)$$

Substituindo os valores de $\bar{T}_i'(s) = \frac{-8}{s}$ e $\bar{Q}'(s) = \frac{1.000}{s}$ na eq.4 e expandindo a mesma em frações parciais, a resposta do sistema a esta perturbação é dada por:

$$T_2(t) = 60 + [-4 - e^{-t}(-4 - 8t)] \quad (5)$$

Depois de um tempo suficientemente longo, $T_2(t) = 56^\circ\text{F}$.

V.8)

Dados: $A_2 = 1,25 A_1$;

Depois de um degrau unitário em F_1 ,

$h_1'(t) = 1,8 \text{ m}$ e $h_2'(t) = 0,8 \text{ m}$;

Em $t = 6 \text{ min}$, $h_2'(t) = 0,7 \text{ m}$;

Para este sistema interligado, tem-se as seguintes funções de transferência:

$$\frac{\bar{h}_1'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_1 \tau p_2 s + R_2 + R_1}{\tau p_1 \tau p_2 s^2 + (R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2) s + 1} \quad (\text{eq. V.8a})$$

$$\frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_2}{\tau p_1 \tau p_2 s^2 + (R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2) s + 1} \quad (\text{eq. V.8b})$$

Admitindo um degrau unitário em $F'_1(t)$ e aplicando o Teorema do Valor Final às equações V.8a e V.8b, tem-se que, para um tempo suficientemente longo:

$$h_1'(t) = R_1 + R_2 = 1,8 \quad (1)$$

$$h_2'(t) = R_2 = 0,8 \quad (2)$$

Conclui-se que $R_1 = 1$ e $R_2 = 0,8$.

Pelas eq.V.8, sabe-se que:

$$\xi = \frac{R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2}{2\sqrt{\tau p_1 \tau p_2}} \quad (3)$$

Sabendo-se que: $A_2 = 1,25 A_1$ e que $\tau p_1 = A_1 R_1$ e $\tau p_2 = A_2 R_2$, substitui-se estas equações na eq.3 e obtém-se que $\xi = 1,4$.

Com este valor de ξ , sabendo-se que, em $t = 6$ min, $h'_2(t) = 0,7$ m, através da *fig A1* tem-se que $\frac{t}{\tau} \approx 6$, ou seja, $\tau \approx \frac{1}{4}$ s.

$$\text{Como: } \tau = \sqrt{\tau p_1 \times \tau p_2} \quad \therefore 1 = \sqrt{A_1^2} \quad \therefore A_1 = 1 \text{ m}^2 \text{ e } A_2 = 1,25 \text{ m}^2.$$

V.9)

Para o sistema em questão, tem-se:

a) Balanço de energia para o tanque:

$$V \rho C_P \frac{dT}{dt} = W C_P (T_i - T) + U A (T_{vp} - T) \quad (1)$$

Balanço de energia para o termômetro:

$$M_{Hg} C_{p_{Hg}} \frac{dT_M}{dt} = h_f A (T - T_M) \quad (2)$$

b) Utilizando as eq.1 e eq.2, pode-se escrever as seguintes funções de transferência:

$$\frac{\bar{T}'_M(s)}{\bar{T}'_i(s)} = \frac{Kp_1}{(\tau p_1 s + 1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{onde } \tau p_1 = \frac{\rho V C_p}{W C_p + U A} \\ e \quad Kp_1 = \frac{W C_p}{W C_p + U A} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\frac{\bar{T}'_M(s)}{\bar{T}'(s)} = \frac{1}{(\tau p_2 s + 1)} \left\{ \tau p_2 = \frac{M_{Hg} C_{pHg}}{h_f A} \right. \quad (4)$$

O produto das equações 3 e 4 fornece a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{T}'_M(s)}{\bar{T}'_i(s)} = \frac{Kp_1}{(\tau p_1 \tau p_2 s^2 + 2\tau \xi s + 1)} \quad (5)$$

c) Utilizando as equações 3 e 5, considerando um degrau de magnitude A, sendo aplicado em T_i , obtêm-se as seguintes respostas:

Para o tanque:

$$T'(t) = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau p_1}} \right) \quad (6)$$

Para o termômetro:

$$T'_M(t) = Kp_1 A \left\{ 1 + \frac{1}{(\tau p_2 - \tau p_1)} \left[\tau p_1 e^{-\frac{t}{\tau p_1}} - \tau p_2 e^{-\frac{t}{\tau p_2}} \right] \right\} \quad (7)$$

Considerando que $\tau p_2 \ll \tau p_1$, a eq.7 torna-se:

$$T'_M(t) = Kp_1 A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau p_1}} \right) \quad (7.a)$$

Assim, comparando as equações 6 e 7.a, pode-se concluir que a temperatura indicada pelo termômetro (T_M) não apresentará erro em relação à temperatura do líquido no tanque para qualquer tempo t .

V.10)

Para o sistema em questão, tem-se que:

Tanque 1:

$$\frac{\bar{h}'_1(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{R_1}{(A_1 R_1 s + 1)} \quad (1)$$

Tanque 2:

Balço material: $A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{h_1}{R_1} - F_2$ (2)

Colocando a eq.2 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, obtém-se:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{h}'_1(s)} = \frac{1}{A_2 R_1 s} \quad (3)$$

- a) Admitindo que se conseguiu um estado estacionário, $\bar{F}_2 = \bar{F}_{1e} = \bar{F}_{1e}$.
- b) O produto das eq.1 eq.3 fornece a seguinte função de transferência

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{R_1}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_1 s)} \quad (4)$$

Admitindo um degrau da forma:

$$\bar{F}'_1(s) = \frac{A}{s} \quad (A > 0) \quad (5)$$

Substituindo a eq.5 na eq.4, expandindo em frações parciais e aplicando a função inversa da Transformada de Laplace, obtém-se a seguinte resposta:

$$h_2(t) = h_{2,s} + \frac{A}{A_2}t - \frac{A A_1 R_1}{A_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{A_1 R_1}} \right) \quad (6)$$

Para tempos grandes, tem-se: $\lim_{t \rightarrow \infty} [h_2(t)] = \infty$.

O Teorema do Valor Final não se aplica neste caso, pois $\bar{h}'(s) \times s$ é infinito par $s = 0$; o que é coerente com o fato que $h'(t)$ não é limitado quando t se aproxima de infinito.

c) Para se obter a resposta do sistema a um impulso da forma $\bar{F}'_1(s) = A$ ($A > 0$), basta derivar a resposta do sistema a um degrau (eq.6).

$$\frac{dh'_2}{dt} = h'_2(t)|_{\text{impulso}} = \frac{A}{A_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{A_1 R_1}} \right) \quad (7)$$

Para tempos grandes, tem-se: $\lim_{t \rightarrow \infty} [h'_2(t)] = \frac{A}{A_2}$.

Aplicando-se o Teorema do Valor Final, obtém-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h'(t)] = \lim_{s \rightarrow 0^+} [h'(s) \times s] = \frac{A R_1 s}{(A_1 R_1 s + 1)(A_2 R_1 s)} = \frac{A}{A_2}$$

V.11)

Dados: $r_1 = 2r_2$;

Aplicando um degrau unitário em F_2 , os valores finais de h'_1 e h'_2 (variáveis desvios) são iguais;

$\xi > 1$, em $t = 3$ min, a resposta atingiu 90% de seu valor final para um degrau unitário, ou seja, $h'_2 = 0,9Kp$.

Admitindo um degrau unitário em $F'_1(t)$, tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h'_1(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [h'_2(t)], \text{ ou seja, } R_1 = R_2.$$

Utilizando a eq.6, pode-se escrever que:

$$\xi = \frac{\tau p_1 + \tau p_2}{2\sqrt{\tau p_1 \times \tau p_2}} \quad (3)$$

Sabendo-se que $\tau_1 = 2\tau_2$ e que $\tau p_1 = A_1 R_1$ e $\tau p_2 = A_2 R_2$, pode-se concluir que:

$$A_1 = \pi \tau_1^2 \text{ e } A_2 = \pi \left(\frac{\tau_1}{2}\right)^2 \quad \therefore A_1 = 4A_2 \quad \therefore \tau p_1 = 4\tau p_2$$

Assim, substituindo esses valores na eq.3, tem-se que $\xi = 1,25$.

Com este valor de ξ , sabendo-se que em $t = 3$ min, $h'_2(t) = 0,9Kp$, através da *fig.41* tem-se que $t/\tau = 4,8$, ou seja, $\tau = 0,625$ min.

$$\tau = \sqrt{\tau p_1 \times \tau p_2} \quad \therefore 0,625 = \sqrt{4\tau p_2} \quad \therefore \tau p_2 = 0,3 \text{ min e } \tau p_1 = 1,2 \text{ min.}$$

V.12)

Tomando a função de transferência dada, tem-se:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{Kp}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} \quad (1)$$

Considerando um degrau na forma: $\bar{f}(s) = \frac{2}{s}$ e analisando a figura V.12 ("SEM PROBLEMAS"), tem-se:

O valor final de $y'(t)$ após a perturbação é dado por: $\bar{y}'(t) = BK_p$. Através da figura V.12 ("SEM PROBLEMAS"), sabe-se que o valor final da resposta é igual 10. Assim tem-se que $K_p = 5$.

Sabe-se que $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$, através da figura, tem-se $OS = 0,38$.

Utilizando a eq.c7 tem-se :

$$\ln(0,38) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq.2, obtem-se que $\xi = 0,3$.

Substituindo a eq.c1 na eq.c4, obtem-se:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3)$$

Através da figura V.12("SEM PROBLEMAS"), tem-se que $T \approx 14$. Substituindo este valor na eq. 3, obtem-se que $\tau = 2$.

V.13)

a) Tomando a função de transferência típica de um sistema de 2ª ordem, tem-se:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}(s)} = \frac{K_p}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} \quad (1)$$

Considerando um degrau na forma: $\bar{f}(s) = \frac{0,5}{s}$ e analisando a figura V.13 ("SEM PROBLEMAS"), tem-se:

O valor final de $y'(t)$ após a perturbação é dado por: $\bar{y}'(t) = BK_p$. Através da figura V.13 ("SEM PROBLEMAS"), sabe-se que o valor final da resposta é igual 10. Assim tem-se que $K_p = 20$.

Sabe-se que $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$, através da figura, tem-se $OS = 0,25$.

Utilizando a eq.c7 tem-se :

$$\ln(0,25) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq.2, obtém-se que $\xi = 0,4$.

Utilizando a eq.3 do problema anterior (V.12), tem-se:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \quad (3)$$

Através da figura V.13 ("SEM PROBLEMAS"), tem-se que $T \approx 2.050$. Substituindo este valor na eq. 3, obtém-se que $\tau = 300$.

Substituindo, então, os valores de K_p , τ e ξ na eq.1, obtém-se a função de transferência do sistema em questão, que é dada por:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{\bar{f}'(s)} = \frac{20}{(90.000s^2 + 240s + 1)}$$

b) Utilizando a eq.b3, pode-se escrever a resposta do sistema a um impulso unitário, que é dada por:

$$y'(t) = 0,07 e^{-\frac{0,4t}{300}} \text{sen}(0,003t)$$

c)

V.14)

Tomando a fig.V.14 ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

Para o controlador PID bem regulado, pode-se estimar que $\xi > 1$.

Para o controlador PID mal regulado, sabe-se $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$ e através da figura, tem-se que $OS = 0,3$.

Utiliza-se, então, a eq.c7 e tem-se que:

$$\ln(0,3) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \quad (1)$$

Resolvendo a eq.1, obtem-se que $\xi = 0,36$

V.15)

Dados: $V_1 = V_2 = 1 \text{ ft}^3$; área de transferência $A = 1 \text{ ft}^2$;
 $U = 10 \text{ btu/h ft}^2 \text{ } ^\circ\text{F}$; $C_p = 1 \text{ btu/lb}_m \text{ } ^\circ\text{F}$;
 $\rho = 50 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$;

a) Balanço de Energia para o tanque mais externo (tanque 1):

$$V\rho C_p \frac{dT_o}{dt} = WC_p(T_i - T_o) + UA(T - T_o) \quad (1)$$

Balanço de Energia para o tanque mais interno (tanque 2):

$$V\rho C_p \frac{dT}{dt} = H - UA(T - T_o) \quad (2)$$

b) Substituindo os valores dados, colocando em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à eq.1, tem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{T}_o'(s)}{\bar{T}'(s)} = \frac{0,5}{(2,5s+1)} \quad (3)$$

Da mesma forma, substituindo os valores dados, colocando em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à eq.2, obtem-se a seguinte expressão:

$$(50s-10)\bar{T}'(s) = \bar{H}'(s) - 10\bar{T}_o'(s) \quad (4)$$

Utilizando a eq.3, obtem-se que:

$$\bar{T}_o'(s) = \frac{0,5}{(2,5s+1)} \bar{T}'(s) \quad (3.a)$$

Substituindo a eq.3.a na eq.4 e rearranjando a mesma, obtem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\bar{T}'(s)}{\bar{H}'(s)} = \frac{0,5s+2}{(25s^2+15s+1)} \quad (5)$$

O produto das eq.3 e 5 fornece a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{T}_o'(s)}{\bar{H}'(s)} = \frac{0,1}{(25s^2+15s+1)}$$

V.16)

Tomando como base a figura V.16 ("SEM PROBLEMAS") e a função de transferência dada, pode-se escrever que:

$$\frac{\bar{R}'(s)}{\bar{P}'(s)} = \frac{K_p}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1)} \quad (1)$$

a) Considerando um degrau na forma: $\bar{P}'(s) = \frac{16}{s}$ e analisando a figura V.16, tem-se:

O valor final de $R'(t)$ após a perturbação é dado por: $R'(t) = BK_p$. Através da figura, sabe-se que o valor final da resposta é igual 3,2 (variáveis desvio). Assim tem-se que $K_p = 0,2$.

Sabe-se que $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$. Assim, através da figura, tem-se que $OS = 0,47$.

Utiliza-se, então, a eq.c7 e tem-se que:

$$\ln(0,47) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq.1, obtém-se que $\xi = 0,23$.

Substituindo a eq.c1 na eq.c4, obtém-se:

$$T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (3)$$

Através da figura V.16("SEM PROBLEMAS"), tem que $T = 2,3$ s. Substituindo este valor na eq. 3, obtém-se que $\tau = 0,36$ s.

Substituindo, então, os valores de K_p , τ e ξ na eq.1, obtém-se a função de transferência do sistema em questão, que é dada por:

$$\frac{\bar{R}'(s)}{\bar{P}'(s)} = \frac{0,2}{(0,13s^2 + 0,17s + 1)}$$

b) Utilizando as eq.c1 e eq.c2, obtém-se que: $\phi = 1,35$ e $\omega = 2,73$. Substituindo estes valores na eq.c3, tem-se que $T_a = 0,66$ s.

c) Observando a fig.V.16 ("SEM PROBLEMAS."), pode-se concluir que:

$$t_{resp} \approx T_a + 3T \approx 7,6s.$$

CAPÍTULO VI: SISTEMAS DE ORDEM MAIS ELEVADA

VI.1)

Admitindo a função de transferência dada:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{f}(s)} = \frac{K_p}{(\tau_p s + 1)} e^{-\theta s} \quad (1)$$

Admitindo, então um degrau unitário aplicado em $f(t)$, tem-se:

i) Para $t \leq \theta$, tem-se que $y'(t) = 0$;

ii) Para $t \geq \theta$, tem-se que:

Sem o tempo morto, a resposta do sistema à perturbação degrau seria dada por:

$$y'(t) = \varphi(t) = K_p \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_p}} \right) \quad (2)$$

Como o tempo morto indica um atraso de θ na resposta, tem-se para este sistema que:

$$y'(t) = \varphi(t - \theta) = K_p \left(1 - e^{-\frac{(t-\theta)}{\tau_p}} \right)$$

VI.2)

Rescrevendo a função de transferência dada, tem-se que:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{f}(s)} = \frac{2e^{-2s}}{(1,5s^2 + 1,2s + 1)} \quad (1)$$

Da eq. 1, obtém-se que $\xi = 0,5$ e $\tau = 1,2$.

Para construir o gráfico da resposta de $y'(t)$ em função de t para um degrau $f(t) = 3$, deve obter os seguintes valores:

a) Tempo morto: Da eq. 1, tem-se que $\theta = 2$.

b) Tempo de ascensão:

Utilizando as eq. c1 e eq. c2, obtém-se que: $\phi = 1,05$ e $\omega = 0,72$. Substituindo estes valores na eq. c3 (considerando o tempo morto $\theta = 2$) tem-se que:

$$T_1 = \frac{\pi - \phi}{\omega} + 2 = 4,9$$

c) Primeiro máximo de $y'(t)$ e o tempo em que ele ocorre:

Utilizando a eq. c7, tem-se que $OS = 0,16$.

O valor final de $y'(t)$ após a perturbação é dado por: $\bar{y}'(t) = BK_p = 6$.

Sabe-se que $OS = \frac{\text{valor excedente}}{\text{valor final}}$. Assim tem-se que o valor excedente é 1,02 e o valor do primeiro máximo é 7,02.

Utilizando a eq. a3, tem-se que a resposta do sistema à perturbação é dada por:

$$\text{Para } 0 \leq t \leq 2: \quad y'(t) = 0$$

Para $t \geq 2$:

$$y'(t) = 6 - 15,9e^{-0,42t} \text{ sen}(0,72t - 0,39)$$

Utilizando o método de tentativa e erro, tem-se que, para $y'(t) = 7,02$, $t_1^{\text{máx}} = 6,3$.

d) Segundo máximo de $y'(t)$ e o tempo em que ele ocorre:

Utilizando a fig. A2, tem-se que:

$$\text{Razão de declínio} = \frac{C}{A} = 0,03 \quad \therefore C = 0,03.$$

Assim, o valor do segundo máximo é $y'(t) = 6,03$.

Através da *fig. A2*, observa-se que o tempo em que ocorre o segundo máximo é dada por:

$$t_{2^{\circ} \text{ má x}} = t_{1^{\circ} \text{ má x}} + T \quad (2)$$

Utilizando a *eq. c4*, tem-se que $T = 8,7$. Substituindo os valores na *eq. 2*, obtem-se que $t_{2^{\circ} \text{ má x}} = 15$.

e) Período: Obtido em d, $T = 8,7$.

f) O valor final de $y'(t)$ após a perturbação é dado por: $y'(t) = BK_p = 6$.

Finalmente, tendo obtido os valores necessários pode-se construir o gráfico da resposta de $y'(t)$ em função de t para um degrau $f(t) = 3$, conforme a *fig. VI.1*:

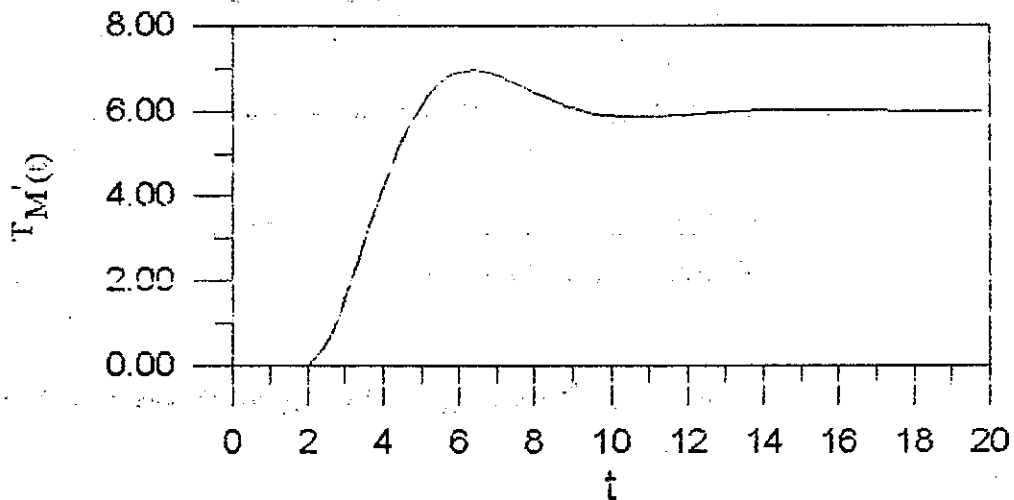


Figura VI.1

VI.3)

Para o sistema apresentado tem-se que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}; \quad F_1 = \frac{h_1}{R_1}; \quad F_2 = \frac{h_2}{R_2}; \quad F_3 = \text{cte};$$

Assim, pode-se escrever as seguintes funções de transferência:

Tanque 1:
$$\frac{\bar{h}_1'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_1 e^{-Ds}}{(A_1 R_1 s + 1)} \quad (1)$$

Tanque 2: Sendo $A_1 R_1 = A_2 R_2 = \tau p$, tem-se:

$$\frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_2 e^{-Ds}}{(\tau p s + 1)^2} \quad (2)$$

Tanque 3:

Sabe-se que:

$$\frac{\bar{h}_3'(s)}{\bar{F}_2'(s)} = \frac{1}{A_3 s} \quad e \quad \frac{\bar{F}_2'(s)}{\bar{h}_2'(s)} = \frac{1}{R_2}$$

Utilizando a propriedade multiplicativa, tem-se que:

$$\frac{\bar{h}_3'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{e^{-Ds}}{A_3 s (\tau p s + 1)^2} \quad (3)$$

Admitindo um impulso unitário ocorrendo em $F_1'(t)$ em $t = 0$, tem-se que:

a) Para $t \leq D$, tem-se que:

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= 0; \\ h_2'(t) &= 0; \\ h_3'(t) &= 0; \end{aligned}$$

b) Para $t \geq D$, tem-se que:

A resposta do sistema a um impulso é dada pela derivada da resposta do sistema a um degrau, assim:

$$h_1'(t)|_{\text{degrau}} = R_1 \left(1 - e^{-\frac{(t-D)}{\tau}} \right)$$

$$h_1'(t)|_{\text{impulso}} = \frac{R_1}{\tau} e^{-\frac{(t-D)}{\tau}}$$

Analogamente, tem-se:

$$h_2'(t)|_{\text{impulso}} = \frac{R_2(t-D)}{\tau^2} e^{-\frac{(t-D)}{\tau}}$$

$$h_3'(t)|_{\text{impulso}} = \frac{1}{A_3} \left(1 - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{(t-D)}{\tau}} - e^{-\frac{(t-D)}{\tau}} \right)$$

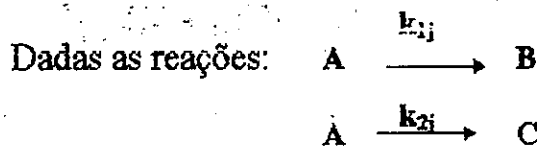
c) Depois de um tempo suficientemente longo, tem-se:

$$h_1'(t) = 0;$$

$$h_2'(t) = 0;$$

$$h_3'(t) = \frac{1}{A_3};$$

VI.4)



Utilizando os resultados obtidos em II.1.e, tem-se:

Balço para o componente A:

Tanque 1:

$$V_1 \frac{dC_{A1}}{dt} = FC_{A0}(t) - FC_{A1}(t) - V_1 k_{11} C_{A1}(t) - V_1 k_{21} C_{A1}(t) \quad (1.a)$$

Tanque 2:

$$V_2 \frac{dC_{A2}}{dt} = FC_{A1}(t-D) - FC_{A2}(t) - V_2 k_{12} C_{A2}(t) - V_2 k_{22} C_{A2}(t) \quad (1.b)$$

Balço para o componente B:

Tanque 1:

$$V_1 \frac{dC_{B1}}{dt} = -FC_{B1}(t) - V_1 k_{11} C_{A1}(t) \quad (2.a)$$

Tanque 2:

$$V_2 \frac{dC_{B2}}{dt} = FC_{B1}(t-D) - FC_{B2}(t) - V_2 k_{12} C_{A2}(t) \quad (2.b)$$

Colocando a eq.1.a em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se:

$$\frac{\bar{C}'_{A1}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)} = \frac{K_{pA1}}{(\tau_{pA1} s + 1)} \quad (3)$$

onde: $K_{pA1} = \frac{F}{(F + V_1 k_{11} + V_1 k_{21})}$ e $\tau_{pA1} = \frac{V_1}{(F + V_1 k_{11} + V_1 k_{21})}$;

Analogamente, para a eq.1.b, tem-se:

$$\frac{\bar{C}'_{A2}(s)}{\bar{C}'_{A1}(s)} = \frac{K_{pA2}}{(\tau_{pA2} s + 1)} e^{-Ds} \quad (4)$$

onde: $K_{pA1} = \frac{F}{(F + V_2 k_{12} + V_2 k_{22})}$ e $\tau_{pA1} = \frac{V_2}{(F + V_2 k_{12} + V_2 k_{22})}$;

Utilizando as equações 3 e 4 e a propriedade multiplicativa tem-se que:

$$\frac{\bar{C}'_{A2}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)} = \frac{K_{PA1} K_{PA2}}{(\tau_{PA1} s + 1)(\tau_{PA2} s + 1)} e^{-Ds} \quad (5)$$

Colocando a eq.2.a em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se:

$$\frac{\bar{C}'_{B1}(s)}{\bar{C}'_{A1}(s)} = \frac{V_1 k_{11}/F}{\left(\frac{V_1}{F} s + 1\right)} \quad (6)$$

Utilizando as equações 3 e 6 e a propriedade multiplicativa tem-se que:

$$\frac{\bar{C}'_{B1}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)} = \frac{(V_1 k_{11}/F) K_{PA1}}{\left(\frac{V_1}{F} s + 1\right) (\tau_{PA1} s + 1)} \quad (7)$$

Colocando a eq.2.b em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se:

$$\bar{C}'_{B2}(s) = \frac{F}{(V_2 s + F)} \bar{C}'_{B1}(s) e^{-Dc} + \frac{V_2 k_{12}}{(V_2 s + F)} \bar{C}'_{A2}(s) \quad (8)$$

Tomando as funções de transferência $\frac{\bar{C}'_{A2}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)}$ e $\frac{\bar{C}'_{B1}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)}$, expressas pelas equações 5 e 7, e substituindo na eq.8, obtém-se:

$$\frac{\bar{C}'_{B2}(s)}{\bar{C}'_{A0}(s)} = \frac{(\tau s + K)}{(\tau_{PA1} s + 1)(\tau_{PA2} s + 1)(\tau_{B1} s + 1)(\tau_{B2} s + 1)} e^{-Ds} \quad (9)$$

$$\tau = K_{p_{B1}} K_{p_{A1}} \tau_{p_{A2}} + K_{p_{B2}} K_{p_{A1}} K_{p_{A2}} \tau_{p_{B1}}$$

Onde:

$$K = K_{p_{B1}} K_{p_{A1}} + K_{p_{B2}} K_{p_{A1}} K_{p_{A2}}$$

Deixa-se como exercício para o leitor o cálculo das funções de transferência para o componente C.

VI.5)

Dados:

$$V_1 = V_2 = V_3 = 10 \text{ ft}^3; \quad W = 250 \text{ lb}_m/\text{min}; \quad \rho = 50 \text{ lb}_m/\text{ft}^3;$$

$$C_p = 1,3 \text{ Btu/lb}_m \text{ } ^\circ\text{F}.$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{W} = 2 \text{ min}; \quad K_{p1} = \frac{1}{WC_p} = 3,08 \times 10^{-3} \frac{\text{min } ^\circ\text{F}}{\text{Btu}}$$

Para o sistema em questão pode-se escrever as seguintes funções de transferência:

Tanque 1:

$$\frac{\bar{T}_1'(s)}{\bar{T}_i'(s)} = \frac{1}{(2s+1)} \quad (1)$$

Tanque 2:

$$\bar{T}_2'(s) = \frac{1}{(2s+1)} \bar{T}_1'(s) + \frac{3,08 \times 10^{-3}}{(2s+1)} \bar{Q}'(s) \quad (2)$$

Substituindo a eq.1 na eq.2, obtém-se:

$$\bar{T}_2'(s) = \frac{1}{(2s+1)^2} \bar{T}_1'(s) + \frac{3,08 \times 10^{-3}}{(2s+1)} \bar{Q}'(s) \quad (3)$$

Tanque 3:

$$\frac{\bar{T}_3'(s)}{\bar{T}_2'(s)} = \frac{1}{(2s+1)} \quad (4)$$

Substituindo a eq.3 na eq.4, obtém-se:

$$\bar{T}_3'(s) = \frac{1}{(2s+1)^3} \bar{T}_1'(s) + \frac{3,08 \times 10^{-3}}{(2s+1)^2} \bar{Q}'(s) \quad (5)$$

Para o sistema em questão, tem-se o seguinte Diagrama de Blocos:

$$G_1(s) = G_2(s) = G_4(s) = \frac{1}{(2s+1)} \quad \text{e} \quad G_3(s) = \frac{1/325}{(2s+1)}$$

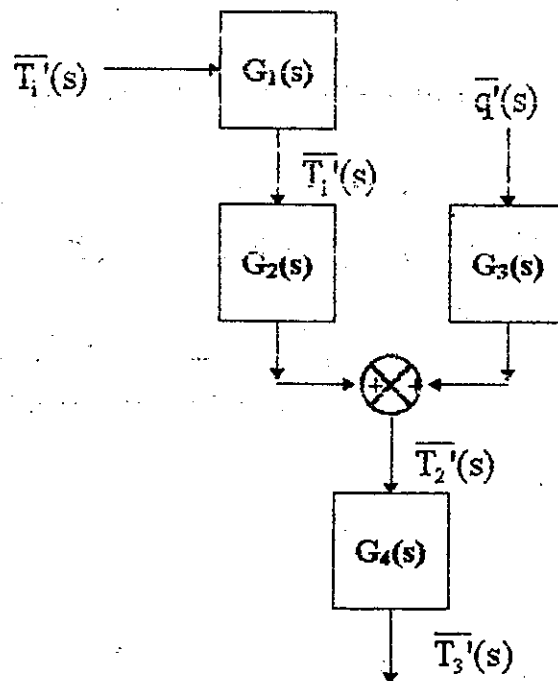


FIGURA VL5

CAPÍTULO VII: CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO NEGATIVA ("FEEDBACK")

VII.1)

Analisando a figura VII.1 ("SEM PROBLEMAS") e, sabendo que um sistema é estável se todos os pólos estão situados no semiplano esquerdo de "s" (LHS), pode-se interpretar a charge da seguinte maneira:

O fato de uma das raízes ter caminhado em direção ao semiplano direito do plano "s" leva o sistema à instabilidade.

VII.2)

Dados: $A = 10 \text{ ft}^2$; $G_m = 1$;
Controlador P com ação reversa: $G_c = K_c$;
 $G_f = -(K_f)$ onde $K_f > 0$;

Para o sistema em questão, tem-se o seguinte balanço material:

$$10 \frac{dh}{dt} = F_i(t) - F_1(t) \quad (1)$$

Colocando em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à eq.1, obtém-se:

$$\bar{h}'(s) = \frac{1}{10s} \bar{F}'_i(s) - \frac{1}{10s} \bar{F}'_1(s) \quad (2)$$

Considerando que F_1 é a variável manipulada e F_i pode sofrer perturbações independentes do controle do sistema, pode-se escrever que:

$$G_p = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_1(s)} = -\frac{1}{10s} \quad (2a)$$

$$G_d = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}'_i(s)} = \frac{1}{10s} \quad (2b)$$

a) Supondo um degrau unitário no set-point, enquanto a carga é mantida constante, tem-se que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (\text{eq.VII.2a})$$

Pode-se, então, escrever o denominador da eq.VII.2a, da seguinte forma:

$$G_p G_c G_f G_m = \frac{K_c K_f}{10s} \quad (3a)$$

$$1 + G_p G_c G_f G_m = \frac{10s + K_c K_f}{10s} \quad (3b)$$

Substituindo as equações 3a e 3b na eq.VII.2a, considerando $G_m = 1$ tem-se:

$$G_{sp} = \frac{K_c K_f}{10s + K_c K_f} \quad (4)$$

A eq.4 pode ser escrita como segue:

$$G_{sp} = \frac{\bar{y}'(s)}{y'_{sp}(s)} = \frac{1}{\frac{10}{K_c K_f} s + 1} \quad (4a)$$

Considerando que o "offset" é dado por:

$$\text{offset} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y'_{sp}(t) - y'(t)] \quad (\text{eq.VII.2c})$$

Considerando um degrau unitário no set-point ($y'_{sp} = 1$), a resposta final do sistema a esta perturbação pode ser encontrada aplicando o teorema do valor final à eq.4a, ou seja, $y'(t) = 1$.

Assim, para este caso (Problema Servo), não há offset.

b) Supondo um degrau unitário na carga, enquanto o set-point é mantido constante, tem-se que:

$$G_{\text{carga}} = \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (\text{eq.VII.2b})$$

Substituindo os valores na eq.VII.2b, tem-se:

$$G_{\text{carga}} = \frac{1}{\frac{K_c K_f}{10} s + 1} \quad (5)$$

Considerando a eq.VII.2c, um degrau unitário na carga, enquanto o set-point é mantido constante ($y_{sp} = 0$), a resposta final do sistema a esta perturbação pode ser encontrada aplicando o teorema do valor final à eq.5. Assim:

$$\text{offset} = 0 - \frac{1}{K_c K_f}$$

Pode-se concluir, então, que, para este caso (Problema Regulador), o sistema apresenta offset.

VII.3)

Tomando a função de transferência para o processo dada por:

$$G_p = \frac{5}{(3s + 1)(2s + 1)} \quad (1)$$

Considerando $G_m = G_c = 1$ e que um controlador P produz uma resposta com razão de declínio igual a 1/4, tem-se:

Sabe-se que:

$$\text{Razão de declínio} = OS^2 \therefore OS = 0,5.$$

Utilizando-se, então, a eq.c7, para o sistema em laço fechado, tem-se que:

$$\ln(0,5) = \frac{-\pi\xi'}{\sqrt{(1-\xi'^2)}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq.2, obtém-se que $\xi' = 0,215$.

A eq.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_p = \frac{5}{(6s^2 + 5s + 1)} \quad (1a)$$

Assim, para o sistema em laço aberto, utilizando a eq. 1a, tem-se que $\xi = 1,02$.

Sabe-se que:

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{(1 + K_p K_c)}} \quad (eq.e2)$$

Substituindo os valores obtidos na eq.e2, obtém-se que o ganho do controlador P que produz um resposta com razão de declínio igual a $\frac{1}{4}$ é $K_c = 4,3$.

VII.4)

Considerando os seguintes dados:

$$G_p = \frac{\bar{y}'(s)}{m'(s)} = \frac{5}{(s+1)(2s+1)} \quad (1)$$

$$G_f = G_m = 1; \quad G_c = 1,6 \text{ (controlador P);}$$

$$\bar{y}'_{sp}(s) = \frac{0,1}{s};$$

a) Considerando a eq.VII.2a, para este sistema, pode-se escrever que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{8}{(2s^2 + 3s + 9)} \quad (2)$$

Rescrevendo a eq.2, obtém-se:

$$G_{sp} = \frac{\bar{y}'(s)}{y'_{sp}(s)} = \frac{0,89}{(0,22s^2 + 0,33s + 1)} \quad (2a)$$

Utilizando a eq.2a, conclui-se que, para o sistema em laço fechado $\xi' = 0,35$.

Sabe-se que o valor do "over shoot" é dado pela eq.c7. Assim, para o sistema em laço fechado, $OS' = 0,31$.

Utilizando a *figA1*, tem-se que: $OS' = \frac{A}{B K_p'}$.

O valor do 1º máximo da curva referente à resposta do sistema em laço fechado ao degrau no set-point, $\bar{y}'_{sp}(s) = \frac{0,1}{s}$, é dado por:

$$Y'_{má x} = A + BK_p', \text{ ou seja, } Y'_{má x} = BK_p'(OS + 1).$$

Assim, o valor do primeiro máximo é $y'(t) = 0,117$.

Empregando as eq.c5 e c6, conclui-se que: $T_a = 0,97$ e $T = 3,14$.

Analisando a resposta do sistema a um degrau (*figA1*), tem-se que, o tempo em que ocorre o valor máximo de $Y'(t)$ é aproximado por:

$$t_{má x} = T_a + \frac{1}{4} T$$

Assim, tem-se que o tempo no qual o primeiro máximo ocorre é $t = 1,76$.

b) Considerando a eq.VII.2c, tem-se que: $\text{offset} = 0,1 - 0,089 = 0,011$.

c) O período de oscilação é obtido através da eq.c6 e é dado por $T = 3,14$.

d) O valor final de $y'(t)$ após a perturbação degrau no set-point é dado por: $y'(t) = BKp' = 0,089$.

Finalmente, tendo obtido os valores necessários pode-se construir o gráfico da resposta de $y'(t)$ em função de t para $\bar{y}'_{sp}(s) = \frac{0,1}{s}$, conforme a fig.VII.4:

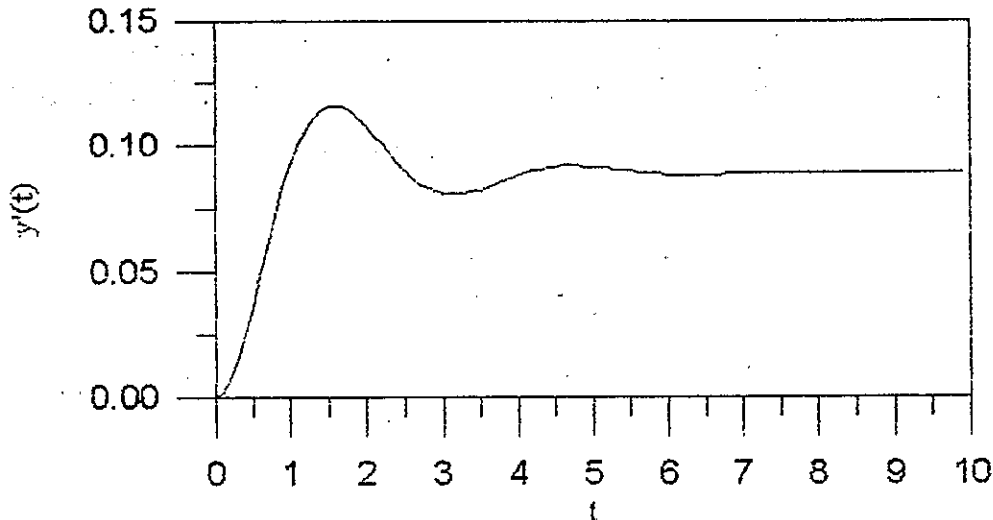


Figura VII.4

VII.5)

Considerando a fig.VII.5 ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

$$G_p = \frac{\bar{y}'(s)}{m'(s)} = \frac{0,1}{(18s^2 + 9s + 1)} \quad (1)$$

$$G_f = G_m = 1;$$

Utilizando a eq.1, para o sistema em laço aberto tem-se que: $\xi = 1,06$ e $\tau = 4,24$.

a) O valor do ganho de um controlador P que produz uma resposta criticamente amortecida ($\xi' = 1$) pode ser obtido utilizando a eq.e2, como segue:

$$1 = \frac{1,06}{\sqrt{(1 + 0,1K_c)}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq.2, obtém-se que $K_c = 1,25$.

Considerando que o controlador P foi ajustado com $K_c = 1,25$ e que o processo foi perturbado por um degrau de magnitude 1,2 no set-point, pode-se escrever que:

b) Utilizando a eq.d1 e eq.d2 tem-se que $K_p' = 0,09$ e $\tau' = 4$.

Com os valores de K_p' , τ' e ξ' , pode-se escrever a função de transferência para o sistema em laço fechado, conforme segue:

$$\frac{\bar{y}'(s)}{y_{sp}'(s)} = \frac{0,09}{(16s^2 + 9s + 1)} \quad (3)$$

Utilizando a eq.1 e a eq.a2, pode-se escrever a resposta do sistema a um degrau de magnitude 1,2 no set-point, dada por:

$$y'(t) = 0,11 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (4)$$

c) Utilizando a eq.VII.2c, pode-se escrever que: offset = $1,2 - 0,11 = 1,09$.

VII.6)

Dados: $A_1 = 2 \text{ ft}^2$; $A_2 = 1 \text{ ft}^2$; $R_1 = R_2 = 1 \text{ ft}/\text{cfm}$;
 $G_m = G_f = 1$;

a)

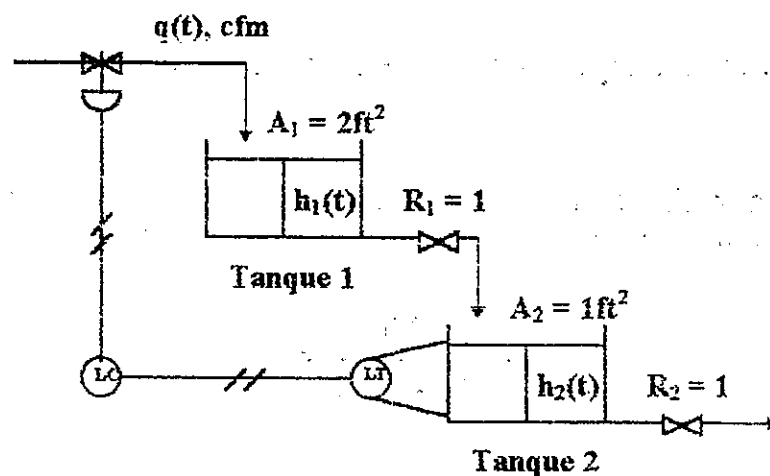


FIGURA VII.6

b) Para o sistema em laço aberto pode-se escrever a seguinte função de transferência:

$$G_p = \frac{1}{(2s+1)(s+1)} \quad (1)$$

Considerando $G_m = G_f = 1$ e que um controlador P produz uma resposta com razão de declínio igual a $1/4$, tem-se:

Sabe-se que:

$$\text{Razão de declínio} = OS^2 \therefore OS = 0,5.$$

Utilizando-se, então, a eq. 7, para o sistema em laço fechado, tem-se que:

$$\ln(0,5) = \frac{-\pi\xi'}{\sqrt{(1-\xi'^2)}} \quad (2)$$

Resolvendo a eq. 2, obtém-se que $\xi' = 0,215$.

A eq. 1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_p = \frac{1}{(2s^2 + 3s + 1)} \quad (1a)$$

Assim, para o sistema em laço aberto, utilizando a eq. 1a, tem-se que $\xi = 1,06$ e $\tau = 1,41$.

Sabe-se que:

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{(1 + K_p K_c)}} \quad (eq. e2)$$

Substituindo os valores numéricos da eq. e2, obtém-se que o ganho do controlador P que produz uma resposta com razão de declínio igual a $1/4$ é $K_c = 23,3$.

VII.7)

Dados: $A_1 = 2 \text{ m}^2$; $A_2 = 2,5 \text{ m}^2$;

As respostas finais para os tanques 1 e 2, devido a um degrau unitário em F_i (laço aberto), são, respectivamente, $h_1'(t) = 1,8 \text{ m}$ e $h_2'(t) = 0,8 \text{ m}$.

Controlador P, com ação reversa: $G_c = K_c$;

$$G_f = \frac{\bar{F}_i'(s)}{c'(s)} = 0,1 \frac{\text{m}^3 / \text{min}}{\text{psig}};$$

$$G_m = 20 \text{ psig/m};$$

Para o sistema representado pela figura VII.7 ("SEM PROBLEMAS") pode-se escrever as seguintes funções de transferência:

$$\frac{\bar{h}_1'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{R_1 \tau_p s + R_2 + R_1}{\tau_p \tau_p s^2 + (R_2 A_1 + \tau_p + \tau_p) s + 1} \quad (1)$$

$$\frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{R_2}{\tau_p \tau_p s^2 + (R_2 A_1 + \tau_p + \tau_p) s + 1} \quad (2)$$

Considerando um degrau unitário em F_i e, aplicando o Teorema do Valor Final às equações 1 e 2, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h_1'(t)] = R_1 + R_2 = 1,8 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [h_2'(t)] = R_2 = 0,8$$

Conclui-se que $R_1 = 1$ e $R_2 = 0,8$. Sendo, portanto, $\tau_p = \tau_p = 2$.

Substituindo os valores numéricos das equações 1 e 2, tem-se:

$$\frac{\bar{h}_1'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{2s + 1,8}{4s^2 + 5,6s + 1} \quad (1a)$$

e

$$\frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{0,8}{4s^2 + 5,6s + 1} \quad (2a)$$

a) Sabendo-se que G_p é a relação entre a variável controlada e a variável manipulada e G_d a relação entre a variável controlada e a variável que pode sofrer perturbações não relacionadas ao controle do processo, para esse sistema tem-se que:

$$G_p = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{0,8}{4s^2 + 5,6s + 1} \quad \text{e} \quad G_d = 0;$$

b) Considerando a eq. VII.2a, para este sistema, pode-se escrever que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{0,08K_c}{(4s^2 + 5,6s + 1 + 1,6K_c)} \quad (3)$$

c) Rescrevendo a eq.3, obtém-se:

$$G_{sp} = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{h}_2'_{sp}(s)} = \frac{0,08K_c / (1 + 1,6K_c)}{\left(\frac{4}{1 + 1,6K_c} s^2 + \frac{5,6}{1 + 1,6K_c} s + 1 \right)} \quad (3a)$$

Utilizando as funções de transferência para o sistema em laço aberto e laço fechado, dadas pelas equações 2a e 3a, pode-se escrever que:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 + 1,6K_c}} \quad (4)$$

$$2\tau'\xi' = \frac{2\tau\xi}{1 + 1,6K_c} \quad (5)$$

Substituindo a eq.4 na eq.5, obtém-se:

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 1,6K_c}} \quad (6)$$

Sabe-se que:

$$\text{Razão de declínio} = OS^2 \therefore OS = 0,5.$$

Utilizando-se, então, a eq. 7, para o sistema em laço fechado, tem-se que:

$$\ln(0,5) = \frac{-\pi\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}} \quad (7)$$

Resolvendo a eq. 7, obtém-se que $\xi' = 0,22$.

Da eq. 2a, tem-se que $\xi = 1,4$. Substituindo, então, os valores da eq. 6, tem-se $K_c = 24,7$, para um controlador P que produz uma resposta com razão de declínio igual a 1/4.

VII.8)

Considerando o sistema com interação, descrito pela fig VII.8 ("SEM PROBLEMAS"), tem-se os seguintes balanços materiais:

$$\text{Tanque 1: } A_1 \frac{dh_1}{dt} = F_1(t) - \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} \quad (1)$$

$$\text{Tanque 2: } A_2 \frac{dh_2}{dt} = \frac{(h_1 - h_2)}{R_1} - F_2(t) \quad (2)$$

Colocando as equações 1 e 2 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace às mesmas, tem-se:

$$\left(A_1 s + \frac{1}{R_1} \right) \bar{h}_1'(s) - \frac{1}{R_1} \bar{h}_2'(s) = \bar{F}_1'(s) \quad (3)$$

$$\left(A_2s + \frac{1}{R_1}\right)\bar{h}_2'(s) - \frac{1}{R_1}\bar{h}_1'(s) = -\bar{F}_3'(s) \quad (4)$$

Utilizando, então, o Método de Kramer, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} \left(A_1s + \frac{1}{R_1}\right) & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(A_2s + \frac{1}{R_1}\right) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{h}_1'(s) \\ \bar{h}_2'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{F}_1'(s) \\ -\bar{F}_3'(s) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Da eq.5, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} \left(A_1s + \frac{1}{R_1}\right) & \bar{F}_1'(s) \\ -\frac{1}{R_1} & -\bar{F}_3'(s) \end{vmatrix} = \bar{h}_2'(s) \quad (5a)$$

Encontrando os determinantes das matrizes da eq.5a, obtém-se:

$$\bar{h}_2'(s) = \frac{-\left(A_1s + \frac{1}{R_1}\right)\bar{F}_3'(s) + \frac{\bar{F}_1'(s)}{R_1}}{A_1A_2s^2 + \left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{A_2}{R_1}\right)s} \quad (5b)$$

Multiplicando o denominador e o numerador da eq.5b por R_1 , tem-se:

$$\bar{h}_2'(s) = \frac{-(\tau p_1 s + 1)\bar{F}_3'(s)}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2)s} + \frac{\bar{F}_1'(s)}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2)s} \quad (5c)$$

A equação 5c fornece as expressões de G_d e G_p , que são dadas por:

$$G_p = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_3'(s)} = \frac{-(\tau p_1 s + 1)}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2)s} \quad (6a)$$

e

$$G_d = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{1}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2)s} \quad (6b)$$

Utilizando as equações VII.2a e VII.2b, pode-se escrever G_{sp} e G_{carga} da seguinte maneira:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{(\tau p_1 s + 1) K_c}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2 + \tau p_1 K_c)s + K_c}$$

$$G_{carga} = \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{1}{\tau p_1 A_2 s^2 + (A_1 + A_2 + \tau p_1 K_c)s + K_c}$$

VII.9)

Dados: $G_m = G_f = 1$; Controlador P com ação reversa e direta disponíveis;

ESTRATÉGIA 1: Manipular $F_3(t)$.

Para essa estratégia, pode-se utilizar o resultado obtido em VII.8. Conforme segue:

$$G_{sp} = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{h}_2'_{sp}(s)} = \frac{(\tau p_1 s + 1)}{\frac{\tau p_1 A_2}{K_c} s^2 + \left(\frac{A_1 + A_2}{K_c} + \tau p_1 \right) s + 1} \quad (1)$$

Supondo um degrau de magnitude B no set-point, $\bar{h}_2'_{sp}(s) = \frac{B}{s}$, aplicando-se, então, o Teorema do Valor final à eq.1 obtém-se:

$$\text{offset} = \lim_{t \rightarrow \infty} [h_2'_{sp}(t) - h_2'(t)] = B - B = 0$$

Assim, conclui-se que a estratégia 1 não apresenta offset.

ESTRATÉGIA 2: Manipular $F_1(t)$.

Dessa forma, tem-se a seguinte função de transferência:

$$G_p = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_2}{\tau p_1 \tau p_2 s^2 + (R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2)s + 1} \quad (2)$$

Utilizando a eq.VII.2a, obtém-se:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{K_c R_2 / (1 + K_c R_2)}{\frac{\tau p_1 \tau p_2}{1 + K_c R_2} s^2 + \left(\frac{R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2}{1 + K_c R_2} \right) s + 1} \quad (3)$$

Supondo um degrau de magnitude B no set-point, $\bar{h}_2'_{sp}(s) = \frac{B}{s}$, aplicando-se, então, o Teorema do Valor final à eq.3 obtém-se:

$$\text{offset} = \lim_{t \rightarrow \infty} [h_2'_{sp}(t) - h_2'(t)] = B - \frac{B K_c R_2}{1 + K_c R_2} = \frac{B}{1 + K_c R_2}$$

Conclui-se, então, que a estratégia 2 apresenta offset. Sendo assim, a estratégia 1 foi adotada.

VII.10)

Dados:

$$V = 6 \text{ ft}^3; \quad W = 300 \text{ lb}_m/\text{min}; \quad \rho = 62,5 \text{ lb}_m/\text{ft}^3;$$

$$C_p = 1 \text{ Btu/lb}_m^\circ\text{F}.$$

$$a) \quad \tau_p = \frac{\rho V}{W} = 1 \text{ min}; \quad K_{p_1} = \frac{1}{WC_p} = \frac{1}{300} \frac{\text{min}^\circ\text{F}}{\text{Btu}}$$

Para o sistema em laço aberto pode-se escrever a seguinte função de transferência:

$$\bar{T}_1'(s) = \frac{1}{(1,25s+1)} \bar{T}_1'(s) + \frac{1/300}{(1,5s+1)} \bar{Q}'(s) \quad (1)$$

Admitindo-se que a taxa de calor Q é a variável manipulada e a temperatura de entrada T_1 pode variar independentemente do controle, pode-se escrever que:

$$G_p = \frac{\bar{T}_1'(s)}{\bar{Q}'(s)} = \frac{1/300}{(1,5s+1)} \quad e \quad G_d = \frac{\bar{T}_1'(s)}{\bar{T}_1'(s)} = \frac{1}{(1,25s+1)} \quad (2 \text{ e } 3)$$

b) Considerando agora:

Controlador PD com $K_c = 1 \text{ psig}^\circ\text{F}$ e $\tau_D = 0,2 \text{ min}$;

$$G_f = \frac{\bar{Q}'(s)}{c'(s)} = 800; \quad G_m = 1;$$

Utilizando as equações VII.2a e VII.2b, tem-se:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (4)$$

$$G_{carga} = \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (5)$$

Para o controlador PD, tem-se que: $G_c = K_c(1 + \tau_D s)$.

Substituindo os valores de G_c , G_p , G_d , G_f e G_m nas equações 4 e 5, obtêm-se as seguintes expressões:

$$G_{sp} = \frac{0,73(1 + 0,2s)}{0,49s + 1} \quad (4a)$$

$$G_{carga} = \frac{0,27}{0,49s + 1} \quad (5a)$$

VII.11)

Sabe-se que: $F_1 = \frac{h_1}{R_1}; \quad F_2 = \frac{h_2}{R_2};$

Se $F_{1,e}$ (ft³/min) for plotado contra $h_{1,e}$ (ft) será obtida uma reta com coeficiente angular $\left(\frac{dF_{1,e}}{dh_{1,e}}\right) = 2 \text{ ft}^2 / \text{min};$

O sistema é criticamente amortecido, isto é, $\xi = 1$ e $\tau_{p1} = \tau_{p2}$. Como $A_1 = A_2 = 2 \text{ ft}^2$, $R_1 = R_2$;

a) $F_{1,e} = 2h_{1,e} \therefore \frac{h_{1,e}}{F_{1,e}} = R_1 = R_2 = 0,5 \text{ ft} / \text{cfm}$

$$\tau_{p1} = A_1 R_1 = 1 \text{ min};$$

$$K_p = R_2 = 0,5 \text{ ft/cfm};$$

Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,5}{(s^2 + 2s + 1)} \quad (1)$$

Através da fig. VII.11 ("SEM PROBLEMAS"), sabe-se que F_1 é a variável manipulada e que nenhuma outra variável pode sofrer perturbações independentes do controle. Assim:

$$G_p = \frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{0,5}{(s + 1)^2}; \quad G_d = 0; \quad G_c = K_c; \quad G_f = 0,1; \quad G_m = 1;$$

b) Considerando a eq.VII.2a, para este sistema, pode-se escrever que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{0,05K_c}{(s^2 + 2s + 1 + 0,05K_c)} \quad (2)$$

Rescrevendo a eq.2, obtém-se:

$$G_{sp} = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{h}_2'_{sp}(s)} = \frac{0,05K_c / (1 + 0,05K_c)}{\left(\frac{1}{1 + 0,05K_c} s^2 + \frac{2}{1 + 0,05K_c} s + 1 \right)} \quad (2a)$$

Utilizando as funções de transferência para o sistema em laço aberto e laço fechado, dadas pelas equações 1 e 2a, pode-se escrever que:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 + 0,05K_c}} \quad (3)$$

$$2\tau'\xi' = \frac{2\tau\xi}{1 + 0,05K_c} \quad (4)$$

Substituindo a eq.3 na eq.4, obtém-se:

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 0,05K_c}} \quad (5)$$

Sabe-se que:

$$\text{Razão de declínio} = OS^2 \therefore OS = 0,5.$$

Utilizando-se, então, a eq.c7, para o sistema em laço fechado, tem-se que:

$$\ln(0,5) = \frac{-\pi\xi'}{\sqrt{1 - \xi'^2}} \quad (6)$$

Resolvendo a eq.6, obtém-se que $\xi' = 0,215$.

Como o sistema em laço aberto é criticamente amortecido, $\xi = 1$. Substituindo, então, os valores da eq.5, tem-se $K_c = 412,7$, para um controlador P que produz uma resposta com razão de declínio igual a $1/4$.

c) Supondo que existisse interação entre os tanques, pode-se utilizar a seguinte função de transferência:

$$G_p = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R_2}{\tau p_1 \tau p_2 s^2 + (R_2 A_1 + \tau p_1 + \tau p_2) s + 1} \quad (7)$$

Substituindo os valores numéricos da eq.7, obtém-se:

$$G_p = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{0,5}{s^2 + 3s + 1} \quad (7a)$$

Análogo ao sistema sem interação, pode-se utilizar a eq.VII.2a, obtendo:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{0,05K_c}{(s^2 + 3s + 1 + 0,05K_c)} \quad (8)$$

Rescrevendo a eq.8, obtém-se:

$$G_{sp} = \frac{\bar{h}_2'(s)}{\bar{h}_2'_{sp}(s)} = \frac{0,05K_c / 1 + 0,05K_c}{\left(\frac{1}{1 + 0,05K_c} s^2 + \frac{3}{1 + 0,05K_c} s + 1 \right)} \quad (8a)$$

Da mesma forma, utilizando as funções de transferência para o sistema com interação em laço aberto e laço fechado, dadas pelas equações 7 e 8a, pode-se escrever que:

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 + 0,05K_c}} \quad (9)$$

$$2\tau'\xi' = \frac{2\tau\xi}{1 + 0,05K_c} \quad (10)$$

Substituindo a eq.9 na eq.10, obtém-se:

$$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 0,05K_c}} \quad (11)$$

Para uma resposta com razão de declínio igual a 1/4, tem-se $\xi' = 0,215$ e para o sistema em laço aberto, tem-se $\xi = 1,5$ (eq.7).

Resolvendo a eq.11, obtém-se que para o sistema com interação, $K_c = 953,5$.

VII.12)

Dados:

$$G_p = \frac{5}{(s+1)^2}; \quad G_d = \frac{1}{(s+1)^2}; \quad G_m = G_f = 1$$

Controlador PI, com $\tau_I = 2$.

a) O ganho do controlador que produz uma resposta com $\xi' = 0,707$, pode ser obtido da seguinte forma:

Para o controlador PI, tem-se que: $G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$.

Utilizando a eq.VII.2a, para este sistema, pode-se escrever que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (1)$$

Calculando o numerador e o denominador da eq.1:

$$G_p G_c G_f = \frac{5K_c \left(1 + \frac{1}{2s} \right)}{(2s+1)^2} \quad (1a)$$

$$1 + G_p G_c G_f G_m = \frac{(2s+1)^2 + 5K_c \left(1 + \frac{1}{2s} \right)}{(2s+1)^2} \quad (1b)$$

Substituindo as equações 1a e 1b na eq.1, tem-se:

$$G_{sp} = \frac{5K_c \left(1 + \frac{1}{2s}\right)}{(2s+1)^2 + 5K_c \left(1 + \frac{1}{2s}\right)} \quad (2)$$

A eq.2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_{sp} = \frac{1}{\frac{4}{5K_c} s^2 + \frac{2}{5K_c} + 1} \quad (2a)$$

Da eq.2a, tem-se que:

$$\tau'^2 = \frac{4}{5K_c} \quad (3)$$

$$2\tau'\xi = \frac{2}{5K_c} \quad (4)$$

Substituindo a eq.3 na eq.4, obtém-se:

$$2 \left(\frac{4}{5K_c} \right)^{\frac{1}{2}} \xi = \frac{2}{5K_c} \quad \therefore K_c = \frac{(2\xi)^2}{5} \quad \therefore \xi = 0,707; \underline{K_c = 0,1}$$

b) Sabe-se que o período natural de oscilação é dado pela seguinte expressão:

$$T_n = 2\pi\tau \quad (\text{eq.VII.12})$$

Da eq.3, tem-se para $K_c = 0,1$, $\tau = 2,83$. Assim, $T_n = 17,8$.

c) Utilizando a eq.VII.2b e a expressão de G_d dada, tem-se que:

$$G_{carga} = \frac{G_d}{1 + G_p G_c G_f G_m} = \frac{1}{(2s+1)^2 + 5K_c \left(1 + \frac{1}{2s}\right)} \quad (5)$$

A eq.5, pode ser escrita da seguinte forma:

$$G_{\text{carga}} = \frac{\left(\frac{2s}{2s+1} \right)}{4s^2 + 2s + 5K_c} \quad (6)$$

d) Considerando um degrau na variável perturbação, aplicando então o Teorema do Valor Final à eq.6, conclui-se que o sistema em laço fechado não apresenta offset, como já era de se esperar para um controlador PI.

VII.13)

Dados:

$$V_1 = 4 \text{ ft}^3; \quad V_2 = 5 \text{ ft}^3; \quad V_3 = 6 \text{ ft}^3; \quad W = 250 \text{ lb}_m/\text{min};$$

$$\rho = 62.5 \text{ lb}_m/\text{ft}^3; \quad C_p = 1 \text{ Btu}/\text{lb}_m \cdot ^\circ\text{F}.$$

$$\tau_p = \frac{\rho V}{W} \quad \tau_{p1} = 1 \text{ min}; \quad \tau_{p2} = 1.25 \text{ min}; \quad \tau_{p3} = 1.5 \text{ min};$$

$$K_{p1} = \frac{1}{WC_p} = \frac{1}{250} \frac{\text{min} \cdot ^\circ\text{F}}{\text{Btu}};$$

Para o sistema em questão pode-se escrever as seguintes funções de transferência:

Tanque 1:

$$\bar{T}_1'(s) = \frac{1}{(s+1)} \bar{T}_i'(s) + \frac{1/250}{(s+1)} \bar{q}'(s) \quad (1)$$

Tanque 2:

$$\frac{\bar{T}_2'(s)}{\bar{T}_1'(s)} = \frac{1}{(1.25s+1)} \quad (2)$$

Substituindo a eq.1 na eq.2, obtém-se:

$$\bar{T}_2'(s) = \frac{1}{(s+1)(1,25s+1)} \bar{T}_1'(s) + \frac{1/250}{(s+1)(1,25s+1)} \bar{q}'(s) \quad (3)$$

Tanque 3:

$$\frac{\bar{T}_3'(s)}{\bar{T}_2'(s)} = \frac{1}{(1,5s+1)} \quad (4)$$

Substituindo a eq.3 na eq.4, obtem-se:

$$\bar{T}_3'(s) = \frac{1}{(s+1)(1,25s+1)(1,5s+1)} \bar{T}_1'(s) + \frac{1/250}{(s+1)(1,25s+1)(1,5s+1)} \bar{q}'(s) \quad (5)$$

Da eq.5, obtem-se as expressões de G_p e G_d , que são dadas por:

$$G_p = \frac{\bar{T}_3'(s)}{\bar{q}'(s)} = \frac{1/250}{1,875s^3 + 4,625s^2 + 3,75s + 1} \quad (6)$$

$$G_d = \frac{\bar{T}_3'(s)}{\bar{T}_1'(s)} = \frac{1}{1,875s^3 + 4,625s^2 + 3,75s + 1} \quad (7)$$

a) Sabe-se que: $G_f = 500 \frac{\text{Btu/min}}{\text{psig}}; \quad G_m = 1;$

$$G_c = K_c(1 + \tau_D s);$$

Assim, utilizando as equações VII.2a e VII.2b, chega-se às seguintes expressões:

$$G_{sp} = \frac{2K_c(\tau_D s + 1)}{1,875s^3 + 4,625s^2 + (3,75 + 2K_c\tau_D)s + 1 + 2K_c} \quad (8)$$

$$G_{carga} = \frac{1}{1,875s^3 + 4,625s^2 + (3,75 + 2K_c\tau_D)s + 1 + 2K_c} \quad (9)$$

b) Admitindo um degrau unitário em T_3 para um controlador com $K_c = 3$ e $\tau_D = 0,5$ min, tem-se:

Aplicando o Teorema do Valor Final à eq.9, tem-se que:

$$T_3'(t) = \frac{1}{1 + 2K_c}$$

Assim, para este sistema, tem-se que: $\text{offset} = 0 - \frac{1}{7} = -\frac{1}{7}$

VII.14)

Dados: $A_1 = 3 \text{ ft}^2$; $R = 1,0 \text{ min/ft}^2$;

Controlador PI; onde $K_c = 4$ e $\tau_i = 3$ min.

Para a válvula, $K_v = 0,2 \text{ cfm/psi}$;

Para o elemento de medida, $K_m = 1,0 \text{ psi/ft}$;

a) Para o sistema em laço aberto, tem-se a seguinte função de transferência:

$$G_f = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{1}{(3s+1)} \quad (1)$$

Para o controlador PI, tem-se que: $G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$.

Utilizando a eq.VII.2a, para este sistema, pode-se escrever que:

$$G_{sp} = \frac{G_p G_c G_f}{1 + G_p G_c G_f G_m} \quad (2)$$

Calculando o numerador e o denominador da eq.2:

$$G_p G_c G_f = \frac{0,8 \left(1 + \frac{1}{3s} \right)}{(3s+1)} \quad (2a)$$

$$1 + G_p G_c G_f = \frac{(3s+1) + 0,8 \left(1 + \frac{1}{3s} \right)}{(3s+1)} \quad (2b)$$

Substituindo as equações 2a e 2b na eq.1, tem-se:

$$G_{sp} = \frac{2,4s + 0,8}{9s^2 + 5,4s + 0,8} \quad (3)$$

b) Supondo um degrau unitário no set-point e, aplicando o Teorema do Valor Final à eq.3, tem-se que:

$$\text{offset} = \lim_{t \rightarrow \infty} [y'_{sp}(t) - y'(t)], \text{ ou seja, } \text{offset} = 1 - 1 = 0$$

Assim, pode-se concluir que para o degrau no set-point de 2ft para 3ft, a resposta não apresenta offset, ou seja, o nível de líquido alcança o novo set-point, o que já era de se esperar para um controlador PI.

VII.15) Um procedimento consistiria da verificação das perturbações externas principais. No caso dessas perturbações não apresentarem oscilações cíclicas para o ajuste atual do controlador, deve-se considerar o reajuste do mesmo.

VII.16)

a) P ou PI, a ação derivativa deve ser evitada na presença de ruído de alta frequência;

b) P; a ação integral pode ser dispensada, pois "offsets" geralmente não são importantes para este tipo de controle. Por sua vez, a ação derivativa deve ser evitada na presença de ruído;

c e d) PID, pois "offsets" não são usualmente permitidos neste tipo de controle de temperatura e a ação derivativa torna o controle mais conservativo;

e) Neste caso, a presença do tempo morto grande no laço FB induz à instabilidade. Controladores avançados baseados em modelos para predição da resposta podem ter desempenhos satisfatórios para tais casos.

V.17)

Este problema encontra-se detalhadamente resolvido na ref.5, págs.191 a 198.

CAPÍTULO VIII: ESTABILIDADE DE SISTEMAS FEEDBACK

VIII.1)

Dados:

$$G_f G_p G_m = \frac{0,5}{(s+1)(0,5s+1)} \quad (1)$$

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (2)$$

Utilizando as equações 1 e 2, pode-se escrever a Equação Característica do sistema, que é dada por:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(s+1)(0,5s+1) + 0,5K_c(1+1/\tau_i s)}{(s+1)(0,5s+1)} = 0 \quad (3)$$

Da eq.3 tem-se:

$$(s+1)(0,5s+1) + 0,5K_c(1+1/\tau_i s) = 0 \quad (3a)$$

A eq.3a também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tau_i s^3 + 3\tau_i s^2 + (2 + K_c)\tau_i s + K_c = 0 \quad (3b)$$

Peio Método da Substituição Direta, utilizando a eq.3b, tem-se que:

$$\tau_i(\omega_u i)^3 + 3\tau_i(\omega_u i)^2 + (2 + K_u)\tau_i(\omega_u i) + K_u = 0 \quad (4)$$

Sabe-se que $i^3 = -i$ e $i^2 = -1$, então a eq.4 pode ser expressa da seguinte forma:

$$-\tau_i \omega_u i^3 - 3\tau_i \omega_u^2 + (2 + K_u)\tau_i(\omega_u i) + K_u = 0 \quad (5)$$

Para que a igualdade na eq.5 seja satisfeita, tanto a parte real como a parte imaginária da mesma devem ser nulas. Assim, utilizando a eq.5, pode-se escrever que:

$$-\tau_1 \omega_u^3 + (2 + K_u) \tau_1 \omega_u = 0 \quad (5a)$$

$$-3\tau_1 \omega_u^2 + K_u = 0 \quad (5b)$$

Das eq.5a e eq.5b, obtém-se:

$$-\omega_u^2 + 2 + K_u = 0 \quad (5a')$$

$$\omega_u^2 = \frac{K_u}{3\tau_1} \quad (5b')$$

Substituindo a eq.5b' na eq.5a', obtém-se a expressão para o ganho último (K_u), que é dada por:

$$K_u = \frac{-6\tau_1}{(3\tau_1 - 1)} \quad (6)$$

Substituindo a eq.6 na eq.5b', obtém-se:

$$\omega_u^2 = \frac{-6\tau_1}{(3\tau_1 - 1)3\tau_1} \quad \therefore \quad \omega_u^2 = \frac{-2}{(3\tau_1 - 1)} \quad (7)$$

A eq.7, fornece a expressão da frequência última (ω_u), que é dada por:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{2}{(1 - 3\tau_1)}} \quad (7a)$$

VIII.2)

Dados: $A_1 = 5 \text{ ft}^2$; $A_2 = 2 \text{ ft}^2$;

$F_{1,e} = 1 \text{ ft}^3/\text{min}$; $h_{1,e} = 4 \text{ ft}$; $h_{2,e} = 3 \text{ ft}$;

$$G_m = G_f = 1; \quad G_c = K_c;$$

Utilizando os dados acima, obtem-se que: $R_1 = 4$, $R_2 = 3$, $\tau p_1 = 20$ e $\tau p_1 = 6$. Assim, para o sistema em laço aberto, tem-se:

$$G_p = \frac{3}{(20s+1)(6s+1)} \quad (1)$$

Para este sistema tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(20s+1)(6s+1) + 3K_c}{(20s+1)(6s+1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2 tem-se:

$$120s^2 + 26s + 1 + 3K_c = 0 \quad (2a)$$

Resolvendo a eq.2a, obtem-se as seguintes raízes:

$$p_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{\Delta}}{240}$$

$$\Delta = 676 - 480(1 + 3K_c) = 196 - 1440K_c$$

Analisando $p_{1,2}$ em função de K_c , tem-se:

• Para $K_c = 0$:

$$p_{1,2} \begin{cases} -1/6 \\ -1/20 \end{cases}$$

ou seja, o Lugar das Raízes se inicia nos pólos do sistema em laço aberto.

- Para $K_c = 0,14$, tem-se que $\Delta = 0$ e as duas raízes são reais e iguais:

$$P_{1,2} = \frac{-26}{240}$$

- Para $0 \leq K_c \leq 0,14$, tem-se que $\Delta \geq 0$ e as raízes são, portanto, reais.

- Para $K_c > 0,14$, tem-se que $\Delta < 0$ e as raízes são complexas conjugadas, com parte real dada por $\frac{-26}{240}$. Para esses valores de ganho, quanto maior K_c , maior o valor da parte imaginária do par de conjugados.

Após essa análise, pode-se plotar o Diagrama do Lugar das Raízes:

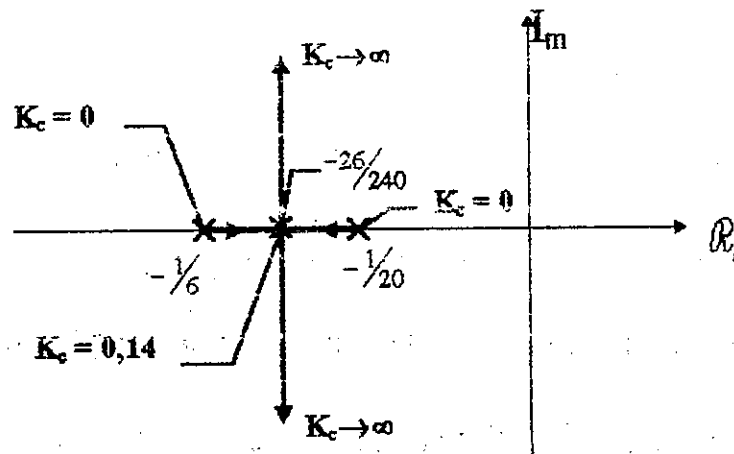


Figura VIII.2

Conclui-se, portanto, que este sistema será sempre ESTÁVEL.

VIII.3)

Dados: $A_1 = 5 \text{ ft}^2$; $A_2 = 2 \text{ ft}^2$;

$F_{1,e} = 1 \text{ ft}^3/\text{min}$; $h_{1,e} = 4 \text{ ft}$; $h_{2,e} = 3 \text{ ft}$;

$$G_m = G_f = 1; \quad G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right);$$

Utilizando os dados acima, obtém-se que: $R_1 = 4$, $R_2 = 3$, $\tau_{p1} = 20$ e $\tau_{p2} = 6$. Assim, para o sistema em laço aberto, tem-se:

$$G_p = \frac{3}{(20s+1)(6s+1)} \quad (1)$$

Utilizando a expressão de G_c , a eq.1, sabendo-se que $G_m = G_f = 1$, pode-se escrever a Equação Característica do sistema, que é dada por:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(20s+1)(6s+1) + 3K_c(1 + 1/\tau_1 s)}{(20s+1)(6s+1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2 tem-se:

$$(20s+1)(6s+1) + 3K_c(1 + 1/\tau_1 s) = 0 \quad (2a)$$

A eq.2a também pode ser escrita da seguinte forma:

$$120\tau_1 s^3 + 26\tau_1 s^2 + (1 + 3K_c)\tau_1 s + 3K_c = 0 \quad (2b)$$

Pelo Método da Substituição Direta, utilizando a eq.2b, tem-se que:

$$120\tau_1 (\omega_u i)^3 + 26\tau_1 (\omega_u i)^2 + (1 + 3K_u)\tau_1 (\omega_u i) + 3K_u = 0 \quad (3)$$

Sabe-se que $i^3 = -i$ e $i^2 = -1$, então a eq.3 pode ser expressa da seguinte forma:

$$-120\tau_1 \omega_u i^3 - 26\tau_1 \omega_u^2 + (1 + 3K_u)\tau_1 (\omega_u i) + 3K_u = 0 \quad (4)$$

Para que a igualdade na eq.4 seja satisfeita, tanto a parte real como a parte imaginária da mesma devem ser nulas. Assim, utilizando a eq.4, pode-se escrever que:

$$-120\tau_1 \omega_u^3 + (1 + 3K_u)\tau_1 \omega_u = 0 \quad (4a)$$

$$-26\tau_1\omega_u^2 + 3K_u = 0 \quad (4b)$$

Das eq.4a e eq4b, obtém-se:

$$-120\omega_u^2 + 1 + 3K_u = 0 \quad (4a')$$

$$\omega_u^2 = \frac{3K_u}{26\tau_1} \quad (4b')$$

Substituindo a eq.4b' na eq.4a', obtém-se a expressão para o ganho último (K_u), que é dada por:

$$K_u = \frac{-26\tau_1}{(78\tau_1 - 360)} \quad \therefore K_u = \frac{0,07\tau_1}{(1 - 0,22\tau_1)} \quad (5a \text{ e } b)$$

Substituindo a eq.5a na eq.4b', obtém-se:

$$\omega_u^2 = \frac{-3}{(78\tau_1 - 360)} \quad (6)$$

A eq.6, fornece a expressão da frequência última (ω_u), que é dada por:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{1}{120(1 - 0,22\tau_1)}} \quad (6a)$$

VIII.4)

Dados: $G_f = -K_B$, onde $K_f > 0$; $G_m = 1$;
Controlador P;

CASO A: Variável manipulada $F_1(t)$. A vazão de saída é dada por $F_2(t) = \frac{h}{R}$.

Para esse caso, tem-se o seguinte balanço material:

$$A \frac{dh}{dt} = F_1 - \frac{h}{R} \quad (1)$$

Colocando a eq.1 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à mesma, obtém:

$$G_p = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{R}{ARs+1} \quad (2)$$

Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{ARs+1 - RK_c K_f}{ARs+1} = 0 \quad (3)$$

Da eq.3, tem-se que:

$$ARs+1 - RK_c K_f = 0 \quad (3a)$$

Da eq.3a, pode-se obter o valor de s , através da expressão seguinte:

$$s = \frac{RK_c K_f - 1}{AR} \quad (3a')$$

Para que o sistema seja estável, $s < 0$, ou seja:

$$\frac{RK_c K_f - 1}{AR} < 0 \quad \therefore \quad RK_c K_f - 1 < 0 \quad \therefore \quad K_c < \frac{1}{K_f R}$$

Analisando a expressão: $K_c < \frac{1}{K_f R}$, tem-se que:

Se o controlador P tiver ação reversa ($K_c > 0$), o sistema só será estável para o seguinte intervalo: $0 < K_c < \frac{1}{K_f R}$.

Se o controlador P tiver ação direta ($K_c < 0$), a raiz da Equação Característica (3a') será negativa. Sendo assim, o sistema será estável para qualquer valor de K_c .

Portanto, para o caso A, deve-se utilizar controlador P com ação direta, já que se tem um intervalo limitado de estabilidade para o controlador P com ação reversa.

CASO B: Variável manipulada $F_2(t)$. A vazão $F_1(t)$ será uma perturbação não medida.

Para esse caso, tem-se o seguinte balanço material:

$$A \frac{dh}{dt} = F_1(t) - F_2(t) \quad (4)$$

Colocando a eq.4 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace à mesma, obtém:

$$G_p = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}_2'(s)} = -\frac{1}{A s} \quad (5a)$$

$$G_d = \frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}_1'(s)} = \frac{1}{A s} \quad (5b)$$

Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{A s + K_c K_f}{A s} = 0 \quad (6)$$

Da eq.6, tem-se que:

$$A s + K_c K_f = 0 \quad (6a)$$

Da eq.6a, pode-se obter o valor de s , através da expressão seguinte:

$$s = \frac{-K_c K_f}{A} \quad (6a')$$

Para que o sistema seja estável, $s < 0$, ou seja:

$$\frac{-K_c K_f}{A} < 0$$

Como K_f e A têm sempre valores positivos, para que o sistema seja estável, K_c tem que ser maior que zero. Portanto, para o caso B, somente o controlador P com ação reversa pode ser utilizado.

VIII.5)

a) Considerando a curva de reação do processo ($G_f G_p$), dada pela fig. VIII.5b ("SEM PROBLEMAS"), como sendo uma aproximação de um modelo de primeira ordem com tempo morto e , considerando um aumento de 2mA na saída do controlador, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$G_p G_f \approx \frac{1,5/2}{200s+1} e^{-60s} \quad (1)$$

Sabe-se também que: $G_m = 16 \frac{\text{mA}}{5\%} = 3,2 \frac{\text{mA}}{\%}$.

O tempo morto pode ser aproximado pelo ajuste de Padé, dado pela seguinte expressão:

$$e^{-\theta s} \approx \frac{\left(1 - \frac{\theta}{2}s\right)}{\left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)} \quad (\text{eq. VIII.5})$$

Assim, tem-se:

$$e^{-60s} \approx \frac{(1 - 30s)}{(1 + 30s)} \quad (2)$$

Substituindo, então, a eq.2 na eq.1 e, considerando o valor de G_m , obtém-se:

$$G = G_f G_p G_m \approx \frac{2,4(1 - 30s)}{(200s + 1)(1 + 30s)} \quad (3)$$

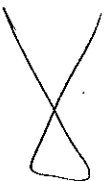
b) Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(200s + 1)(1 + 30s) + 2,4K_c(1 - 30s)}{(200s + 1)(1 + 30s)} = 0 \quad (4)$$

Da eq.4, tem-se que:

$$6.000s^2 + (230 - 72K_c)s + 2,4K_c + 1 = 0 \quad (5)$$

Usando o a Arranjo de Routh para a eq.5, tem-se:



1	6.000	$2,4K_c + 1$
2	$(230 - 72K_c)$	
3	$2,4K_c + 1$	

Analisando o arranjo de Routh, sabe-se que para que o sistema seja estável, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos e diferentes de zero. Assim, pode-se escrever que:

Para $K_c = 3$, tem-se:

Linha 2 \rightarrow 14 (positiva)

Linha 3 \rightarrow 7,2 (positiva)

Para $K_c = 4$, tem-se:

Linha 2 \rightarrow -58 (negativa)

Linha 3 \rightarrow 9,6 (positiva)

Portanto, para $K_c = 3$, o sistema é estável, enquanto que $K_c = 4$, o sistema é instável.

Assim, para $K_c = 3$, o sistema é estável.

VIII.6)

a) Através do sistema em laço fechado com um PID apresentado, pode-se escrever a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(20s + 1)(10s + 1)(0,5s + 1) + K_c(1 + \tau_D s + 1/\tau_I s)}{(20s + 1)(10s + 1)(0,5s + 1)} = 0 \quad (1)$$

b) Da eq.1, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$100s^4 + 215s^3 + (30,5 + K_c \tau_D)s^2 + (1 + K_c)s + K_c/\tau_I = 0 \quad (2)$$

Substituindo os valores de $\tau_D = 2/3$ e $\tau_I = 3$ na eq.2, obtém-se:

$$300s^4 + 645s^3 + (91,5 + 2K_c)s^2 + (3 + 3K_c)s + K_c = 0 \quad (2a)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.2a, tem-se:

1	300	$(91,5 + 2K_c)$	K_c
2	645	$(3 + 3K_c)$	
3	b_1	K_c	
4	c_1		
5	K_c		

Onde: $b_1 = 90,1 + 0,6K_c$ e $c_1 = \frac{b_1(3 + 3K_c) - 645K_c}{b_1}$

c) Sabendo-se que, para que o sistema seja estável, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh devem ser maiores que zero, pode-se obter o valores de K_c para os quais o sistema é estável, da seguinte maneira:

Analisando-se, então, a linha 5, tem-se:

$$c_1 = \frac{90,1 + 0,6K_c(3 + 3K_c) - 645K_c}{90,1 + 0,6K_c} \quad (3)$$

Para se obter o valor do ganho último (K_u), iguala-se a eq.3 a zero, obtendo-se:

$$1,815K_u^2 - 372,9K_u + 270,3 = 0 \quad (4)$$

Resolvendo-se a equação de segundo grau, obtêm-se as seguintes raízes: $K_{u1} = 0,7$ e $K_{u2} = 204,7$.

Assim, conclui-se que o sistema em laço fechado com um PID é estável para $K_{u1} < K_c < K_{u2}$.

VIII.7)

$G_p = \frac{1}{(s-1)}$, observa-se que o processo é instável em laço aberto.

Para este sistema tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_r G_p G_m G_c = \frac{(s-1)(6s+1) + K_c(0,5s+1)}{(s-1)(6s+1)} = 0 \quad (1)$$

Da eq.1 tem-se:

$$6s^2 + (0,5K_c - 5)s + K_c - 1 = 0 \quad (1a)$$

Resolvendo a eq.1a, obtêm-se as seguintes raízes:

$$p_{1,2} = \frac{-(5 - 0,5K_c) \pm \sqrt{\Delta}}{12}$$

$$\Delta = 0,25K_c^2 - 29K_c + 49$$

Analisando $p_{1,2}$ em função de K_c , tem-se:

• Para $K_c = 0$:

$$p_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{12} = \begin{cases} 1 \\ -1/6 \end{cases}$$

ou seja, o Lugar das Raízes se inicia nos pólos do sistema em laço aberto.

- Para dois valores de K_c , tem-se que $\Delta = 0$, quais sejam $K_c = 1,7$ e $K_c = 114,3$; para esses valores de K_c , as duas raízes reais são $0,35$ e $-4,35$, respectivamente.

- Para $0 \leq K_c \leq 1,7$, tem-se que $\Delta \geq 0$ e as raízes são, portanto, reais.

- Para $1,7 \leq K_c \leq 114,3$, tem-se que $\Delta < 0$ e as raízes são complexas conjugadas, com parte real dada por $\frac{5 - 0,5K_c}{12}$. Observa-se que para $K_c = 10$, as raízes são imaginárias puras dadas por $\pm 1,22 i$. Neste intervalo de ganhos, o ramo superior do Lugar das Raízes descreve um arco que é a imagem especular do ramo inferior.

Para $K_c = 58$, a parte imaginária das raízes conjugadas alcança seu máximo ($\pm 2,35 i$), sendo a parte real igual a 2 .

- Para $K_c > 114,3$, $\Delta > 0$ e as raízes são reais. Um dos ramos se aproxima de infinito com o aumento de K_c , o outro, do zero da Equação Característica: -2 .

Após essa análise, pode-se plotar o Diagrama do Lugar das Raízes:

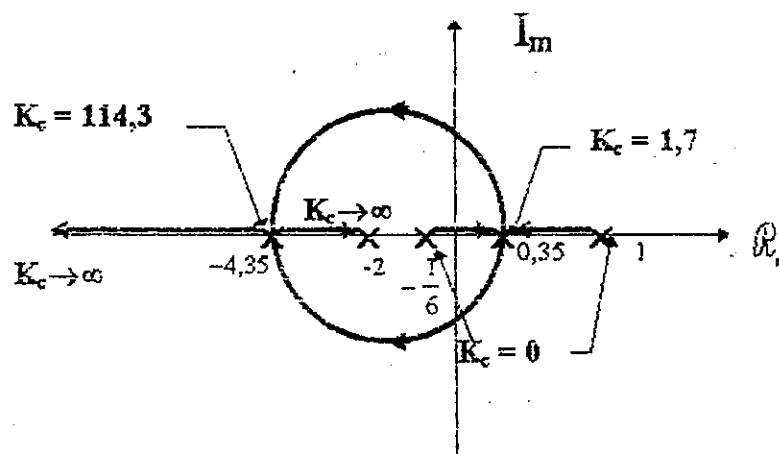


Figura VIII.7

Conclui-se, portanto, que o controlador estabiliza o sistema instável em laço aberto.

VIII.8)

a) Tomando a função de transferência dada:

$$G_f G_p G_m G_c = \frac{K_c(s+4)}{s(s+2)} \quad (1)$$

Utilizando a eq.1, pode-se escrever a Equação Característica, dada por:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{s^2 + 2s + K_c s + 4K_c}{s(s+2)} = 0 \quad (2)$$

Usando a mesma abordagem da questão anterior, traçou-se o seguinte Diagrama do lugar das raízes:

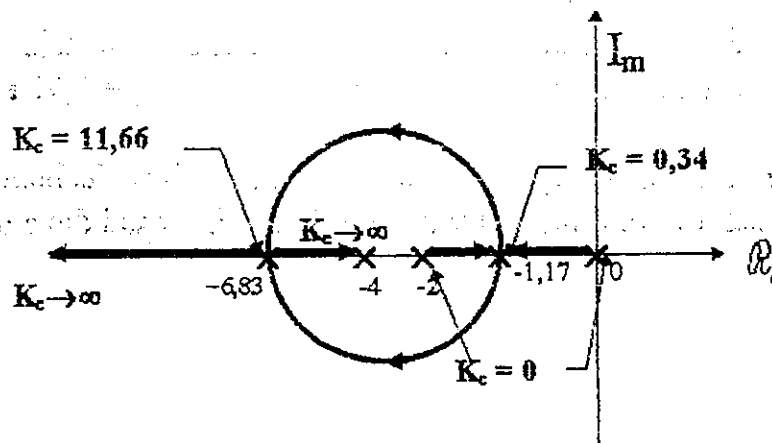


Figura VIII.8

b) Da eq.2, obtêm-se a eq.3, que é o denominador das funções de transferência em laço fechado (G_{sp} e G_{carga}) para o sistema em questão.

$$f(s) = \frac{1}{4K_c} s^2 + \frac{(2 + K_c)}{4K_c} s + 1 \quad (3)$$

Analisando a eq.3, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\tau' = \sqrt{\frac{1}{4K_c}} \quad (3a)$$

$$2\tau'\xi' = \frac{(2 + K_c)}{4K_c} \quad (3b)$$

Substituindo a eq.3a na eq.3b, para um controlador proporcional que produz uma resposta em laço fechado com coeficiente de amortecimento igual a 0,8, tem-se:

$$1,6\sqrt{\frac{1}{4K_c}} = \frac{(2 + K_c)}{4K_c} \quad (4)$$

A eq.4 pode ser rearranjada e escrita da seguinte maneira:

$$K_c^2 - 6,24K_c + 4 = 0 \quad (4a)$$

Resolvendo a eq.4a, obtêm-se as seguintes raízes, ou seja, valores de K_c que produzem resposta em laço fechado com $\xi' = 0,8$: $K_{c1} = 0,72$ e $K_{c2} = 5,5$.

Um menor valor de K_c dará uma resposta em laço fechado mais lenta e com maior offset. Logo, o melhor valor de K_c é 5,5, o qual deve ser implementado.

VIII.9)

Dados:

$$G_p = \frac{5}{(3s + 1)(2s + 1)} \quad (1)$$

$$G_f = \frac{1}{(s + 1)} \quad (2)$$

$$G_m = e^{-0,6s} = \frac{1 - 0,3s}{1 + 0,3s} \quad (3)$$

Controlador P, $G_c = K_c$;

a) Supondo $G_m = 1$, e utilizando os valores de G_p , G_f e G_c dados, pode-se escrever a Equação Característica do sistema, que é dada por:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{6s^3 + 11s^2 + 6s + 1 + 5K_c}{(3s+1)(2s+1)(s+1)} = 0 \quad (4)$$

Da eq.4, tem-se que:

$$6s^3 + 11s^2 + 6s + 1 + 5K_c = 0 \quad (5)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.5, tem-se:

1	6	6
2	11	$(1 + 5K_c)$
3	$(5,45 - 2,73K_c)$	
4	$(1 + 5K_c)$	

Para se obter o valor do ganho último (K_u), iguala-se a linha 3 a zero, obtendo-se:

$$5,45 - 2,73K_u = 0 \quad (6)$$

Resolvendo a eq. obtém-se: $K_u = 2$.

b) Admitindo que K_c foi ajustado em $K_c = \frac{K_u}{2}$, ou seja $K_c = 1$ e considerando agora G_m sendo dado pela eq.3, tem-se a seguinte Eq. Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(6s^3 + 11s^2 + 6s + 6)(1 - 0,3s)}{(3s+1)(2s+1)(s+1)(1 + 0,3s)} = 0 \quad (7)$$

Da eq.7, tem-se que:

$$1,8s^4 + 9,3s^3 + 12,8s^2 + 4,8s + 6 = 0 \quad (8)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.8, tem-se:

1	1,8	12,8	6
2	9,3	4,8	
3	11,9	6	
4	0,10		
5	6		

Analisando o Arranjo de Routh, conclui-se que o sistema é estável.

c) Sabe-se que tempo morto tem efeito desestabilizador para sistemas de controle FB; NÃO convém, portanto, desprezá-lo – como procedido em a – ao se ajustarem controladores deste tipo.

Nesta questão, a presença do tempo morto não foi suficiente para instabilizar o sistema (como verificado em b). O tempo morto, no entanto, deve ter levado o sistema para mais próximo da instabilidade, o que não pôde ser constatado usando as regras do Arranjo de Routh, pois as mesmas não possibilitam o cálculo explícito das raízes da equação característica do sistema.

Dessa forma, de modo a estender a análise do problema, utilizou-se um recurso extra (no caso, o “*software*” MATLAB) ao proposto na questão e procedeu-se o cálculo das raízes da equação característica do sistema, com e sem tempo morto.

Se o sistema efetivamente não tivesse tempo morto, as raízes da equação (5) com $K_c = 1$ seriam: $-1,599$; $-0,117 + 0,782i$ e $-0,117 - 0,782i$. Com tempo morto, as raízes da equação (8) são: $-2,878$; $-0,004 + 0,713i$ e $-0,004 - 0,713i$.

Constata-se assim, o efeito desestabilizador do tempo morto, pois no último caso, o par de raízes complexas conjugadas está bem mais próximo do limite de estabilidade.

VIII.10)

Dado o sistema representado pela fig.VIII.10 ("SEM PROBLEMAS"), sabe-se que:

O sistema em laço aberto é criticamente amortecido, com $A_1 = 2 \text{ m}^2$;
Controlador P com ação reversa, $G_c = K_c$;

$$G_f = \frac{0,1 \text{ m}^3 / \text{min}}{(0,2s + 1) \text{ psig}}; \quad G_m = 20 \text{ psig/m}; \quad R_1 = R_2 = 0,5 \text{ m};$$

Utilizando os dados acima, pode-se escrever que:

$$G_p = \frac{0,5}{(s + 1)^2} \quad (1)$$

Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{0,2s^3 + 1,4s^2 + 2,2s + 1 + K_c}{(s + 1)^2(0,2s + 1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2, tem-se que:

$$0,2s^3 + 1,4s^2 + 2,2s + 1 + K_c = 0 \quad (3)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.3, tem-se:

1	0,2	2,2
2	1,4	$(1 + K_c)$
3	$(1,06 - 0,14K_c)$	
4	$(1 + 2K_c)$	

Analisando o arranjo de Routh, sabe-se que para que o sistema seja estável, todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos e diferentes de zero. Assim, pode-se escrever que:

Para $K_c = 5$, tem-se:

Linha 3 → 1,36 (positiva)

Linha 4 → 11 (positiva)

Para $K_c = 10$, tem-se:

Linha 3 → 0,66 (positiva)

Linha 4 → 21 (positiva)

Para $K_c = 15$, tem-se:

Linha 3 → - 0,15 (negativa)

Linha 4 → 31 (positiva)

Portanto, para $K_c = 5$ e $K_c = 10$, o sistema é estável, enquanto que para $K_c = 15$, o sistema é instável.

Considerando um degrau unitário no set-point, para o sistema estudado tem-se que:

$$\text{offset} = \frac{1}{1 + K_c} \quad (4)$$

Assim, utilizando a eq.4, obtém-se:

Para $K_c = 5$, offset = 0,17;

Para $K_c = 10$, offset = 0,09;

Para $K_c = 15$, offset infinito;

VIII.11)

Dado o sistema representado pela fig.VIII.11 ("SEM PROBLEMAS"), sabe-se que:

$$A_1 = 2 \text{ m}^2 \text{ e } A_2 = 1 \text{ m}^2$$

$$G_f = \frac{\bar{F}_2'(s)}{c'(s)} = \frac{0,1 \text{ m}^3 / \text{min}}{(0,2s + 1) \text{ psig}}; \quad G_m = 20 \text{ psig/m};$$

OBS.: NO ITEM 2, HÁ UM ERRO NO ENUNCIADO DA QUESTÃO VIII.11("SEM PROBLEMAS"), POIS EM G_f $\bar{F}_2'(s)$ é a variável de saída e não $\bar{F}_1'(s)$

$$R_1 = R_2 = 0,5 \text{ m};$$

Utilizando os dados acima e o balanço material do sistema, pode-se escrever que:

$$G_p = -\frac{1}{s} \quad (1)$$

Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{0,2s^2 + s - 2K_c}{(0,2s^2 + s)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2, tem-se que:

$$0,2s^2 + s - 2K_c = 0 \quad (3)$$

Pela 1ª Regra do Arranjo de Routh, se K_c for positivo (ação reversa), o processo será sempre instável, pois a equação (3) terá um coeficiente negativo. Logo, ação direta dever ser adotada.

CAPÍTULO IX: CRITÉRIOS DE PROJETO E AJUSTE

IX.1)

Dados: $A_1 = 5 \text{ ft}^2$; $A_2 = 2 \text{ ft}^2$; $R_1 = 4 \text{ min/ft}^2$ $R_2 = 3 \text{ min/ft}^2$;

Utilizando os dados acima e analisando a fig.VIII.2 ("SEM PROBLEMAS"), pode-se escrever que:

$$G_p = \frac{\bar{h}'_2}{\bar{F}'_1} = \frac{3}{(20s+1)(6s+1)} \quad (1)$$

Sabe-se também que: $G_m = \frac{1}{(s+1)}$; $G_f = 1$; $G_c = K_c$;

Assim, para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(20s+1)(6s+1)(s+1) + 3K_c}{(20s+1)(6s+1)(s+1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2, tem-se que:

$$120s^3 + 146s^2 + 27s + 1 + 3K_c = 0 \quad (3)$$

Usando o a Arranjo de Rouih para a eq.3, tem-se:

1	120	27
2	146	$(1 + 3K_c)$
3	$(26,2 - 2,5K_c)$	
4	$(1 + 3K_c)$	

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se:

$$K_u = 10,5 \text{ e } \omega_u = 0,47;$$

Ajustando o PID pelo método de Ziegler & Nichols (*Tabela F*), obtém-se:

$$K_c = 6,36, \quad \tau_i = 6,63 \quad \text{e} \quad \tau_D = 1,66$$

IX.2)

a) Traçando na figura IX.2.b ("SEM PROBLEMAS") a tangente à curva no seu ponto de inflexão os seguintes parâmetros obtidos:

$$K_p = \frac{5}{2,96} = 1,7;$$

$$\theta = 1,5 \text{ min};$$

$$\tau_p = 7,6 - 1,5 = 6,1 \text{ min};$$

Utilizando então os parâmetros acima tem-se:

$$G = G_p G_f G_m = \frac{1,7e^{-1,5s}}{6,1s + 1} \quad (1)$$

b) Para $t \leq 1,5 \text{ min}$:

$$T'_{2m}(t) = 0 \quad \therefore \quad T_{2m}(t) = 12$$

Para $t \geq 1,5 \text{ min}$:

$$T'_{2m}(t) = \left[1 - e^{-\frac{(t-1,5)}{6,1}} \right]$$

$$T_{zm}(t) = 12 + 5 \left[1 - e^{-\frac{(t-1,5)}{6,1}} \right]$$

Completando então a TABELA 1 ("SEM PROBLEMAS"), tem-se:

tempo	T_{exn}	T_{mod}
0	12,0	12,0
1	12,0	12,0
2	12,4	12,5
3	13,1	13,1
4	13,7	14,0
5	14,2	14,8
6	14,6	15,4
7	15,0	16,1
8	15,3	16,4
9	15,5	16,8
10	15,8	16,9
11	15,9	17,0
12	16,1	16,9

OBS.: DE MODO A QUE SE TENHA O MESMO CONTROLADOR NOS ITENS RESTANTES, O ENUNCIADO DE "SEM PROBLEMAS" DEVERÁ SER CORRIGIDO. ASSIM, NOS ITENS **c** E **d** CONSIDERAR PI, EM VEZ DE P.

- c) Ajustando então via ITAE (*Tabela H*)
Para o ganho:

$$1,7K_c = 0,586 \left(\frac{1,5}{6,1} \right)^{-0,916}$$

$$K_c = 1,2;$$

Para o tempo integral:

$$\frac{6,1}{\tau_1} = 1,03 - 0,165 \left(\frac{1,5}{6,1} \right)$$

$$\tau_1 = 6,17 \text{ min};$$

d) Para o ajuste pelo Método de Ziegler & Nichols, é necessário calcular K_u e T_u .

Escrevendo a Equação Característica, com o tempo morto aproximado por Padé de 1ª ordem:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = 1 + \frac{1,7(1 - 0,75s)K_c}{(6,1s + 1)(0,75s + 1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2, tem-se:

$$4,575s^2 + (6,85 - 1,275K_c)s + 1 + 1,7K_c = 0 \quad (2a)$$

Pelo Método da Substituição Direta, $s = \omega_u j$:

$$\begin{cases} -4,575\omega_u^2 + 1 + 1,7K_u = 0 \\ 6,85 - 1,275K_u = 0 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } K_u = 5,37; \quad \omega_u = 1,49; \quad T_u = 4,22$$

Finalmente, os ajustes de Ziegler & Nichols (*Tabela F*) são:

$$K_c = 2,4 \quad \text{e} \quad \tau_1 = 3,5$$

e) Utilizando a *Tabela G* para o ajuste via Cohen & Coon, tem-se;

$$K_c = \frac{1}{1,7} \times \frac{6,1}{1,5} [0,9 + 1,5/(12 \times 6,1)] = 2,2$$

$$\tau_I = \frac{1,5[30 + 3(1,5/6,1)]}{9 + 20(1,5/6,1)} = 3,3$$

f) O ajuste mais *conservativo* de K_c (e também de τ_I) é o obtido pelo critério de ITAE mínimo para mudanças no set-point.

IX.3)

a) Da figura IX.3 (“SEM PROBLEMAS”):

$$K_u = 3,5;$$

$$\omega_u = 1,155 = \frac{2\pi}{T_u} \quad \therefore \quad T_u = 5,44 \text{ unidades de tempo};$$

Ajustando então um PI via Ziegler & Nichols (*Tabela F*), tem-se:

$$K_c = 1,58 \quad e \quad \tau_I = 4,53;$$

b) Seja:

$$1 + \frac{K_c K \left(1 - \frac{\theta}{2}s\right)}{(\tau s + 1) \left(1 + \frac{\theta}{2}s\right)} = 0$$

O “Lugar das Raízes” se aproxima dos zeros quando $K_c \rightarrow \infty$:

$$\frac{2}{\theta} = 1 \quad \therefore \quad \theta = 2$$

e começa (com $K_c = 0$) nos pólos do sistema:

$$-\frac{2}{\theta} = -1 \quad \therefore \quad \theta = 2, \text{ confirmando o resultado acima,}$$

$$-\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{6} \quad \therefore \quad \tau = 6$$

Dessa forma, a Equação Característica é:

$$\begin{aligned}6s^2 + 7s + 1 + K_c K(1-s) &= 0 \\6s^2 + (7 - K_c K)s + 1 + K_c K &= 0\end{aligned}$$

Para $s = 1,155i$, $K_c = K_u = 3,5$, conforme a figura IX.3 ("SEM PROBLEMAS"):

$$\begin{cases} -7,935 + 1 + 3,5K = 0 \\ 7 - 3,5K = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema acima, tem-se que $K = 2$.

IX.4)

Dados: PI, ajustado via Ziegler & Nichols com $K_c = 0,9$ e $\tau_i = 0,9$;

a) Utilizando a *tabela F*, tem-se para o PI o seguinte ajuste:

$$K_c = 0,45K_u \quad (1)$$

$$\tau_i = \frac{T_u}{1,2} \quad (2)$$

Substituindo os valores de K_c e τ_i nas equações 1 e 2, obtém-se que:

$$K_u = 2 \text{ e } T_u = 1,08.$$

Como os valores de K_u e T_u obtidos, pode-se ajustar o PID, via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, obtendo-se, então, os seguintes parâmetros:

$$K_c = 1,2; \quad \tau_i = 0,54; \quad \tau_D = 0,1;$$

b) Neste caso não deve-se utilizar a ação derivativa, pois a mesma amplifica os ruídos e a resposta em laço fechado pode ficar excessivamente ruidosa.

IX.5)

Dados: $V = 1 \text{ m}^3$;

casos	$q(\text{m}^3/\text{s})$
a	0,01
b	0,02
c	0,05

O sistema inicialmente está em estado estacionário, quando um degrau unitário é aplicado em $C'_o(t)$;

Balço para o Tanque 1:

$$V \frac{dC_1}{dt} = q(C_o - C_1) \quad (1)$$

Balço para o Tanque 2:

$$V \frac{dC_2}{dt} = q(C_1 - C_2) \quad (2)$$

Colocando as equações 1 e 2 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se:

$$\frac{\bar{C}'_1(s)}{\bar{C}'_o(s)} = \frac{1}{\left(\frac{V}{q}s + 1\right)} \quad (3)$$

$$\frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_1(s)} = \frac{1}{\left(\frac{V}{q}s + 1\right)} \quad (4)$$

O produto das eq.3 e eq.4, fornece a seguinte função de transferência:

$$\frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_o(s)} = \frac{1}{\left(\frac{V}{q}s + 1\right)^2} \quad (5)$$

Considerando um degrau unitário em $C'_0(t)$ e, utilizando a eq.a2, obtém-se a seguinte resposta:

$$C'_2(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

Da eq.5, tem-se que $\tau = \frac{V}{q}$. Assim, pode-se escrever que:

Caso a: $C'_2(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{100}\right) e^{-\frac{t}{100}};$

Caso b: $C'_2(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{200}\right) e^{-\frac{t}{200}};$

Caso c: $C'_2(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{500}\right) e^{-\frac{t}{500}};$

b)

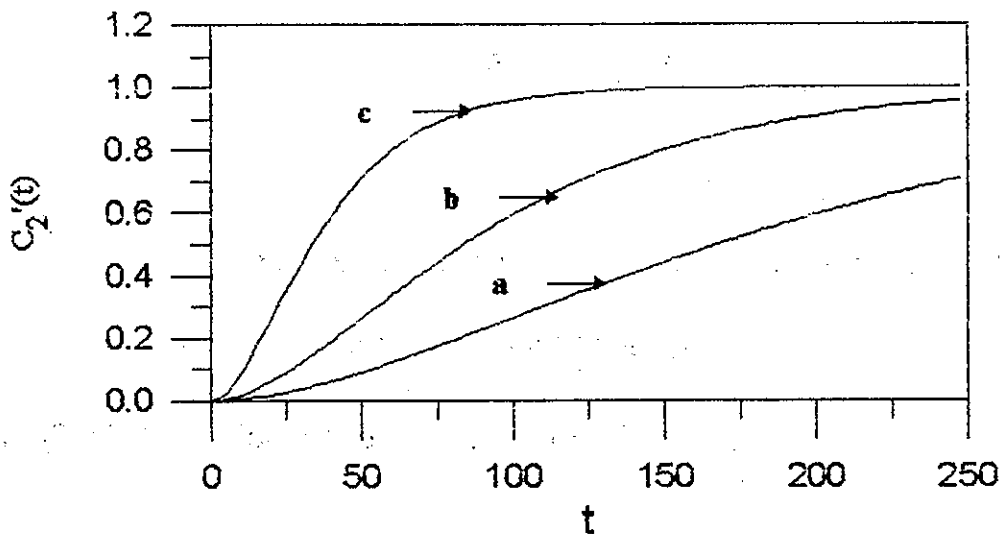


Figura IX.6

c) Tomando os parâmetros do caso em que a resposta é mais lenta, ou seja, $\tau = 100$ e $\xi = 1$, tem-se que:

$$G_p = \frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_0(s)} = \frac{1}{(100s + 1)^2} \quad (7)$$

Sendo dados: $G_m = \frac{1}{(5s+1)}$ e $G_f = 1$.

Assim, para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(100s+1)^2(5s+1) + K_c}{(100s+1)^2(5s+1)} = 0 \quad (8)$$

Da eq.8, tem-se que:

$$50.000s^3 + 1000s^2 + 205s + 1 + K_c = 0 \quad (9)$$

Usando o a Arranjo de Routh para a eq.9, tem-se:

1	50.000	205
2	11.000	$(1 + K_c)$
3	$(200,45 - 4,55K_c)$	
4	$(1 + K_c)$	

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se:

$$K_u = 44,05 \text{ e } \omega_u = 0,064;$$

Ajustando o PID pelo método de Ziegler & Nichols (*Tabela F*), obtém-se:

$$K_c = 26,4, \quad \tau_i = 49,1 \quad \text{e} \quad \tau_D = 12,3$$

IX.6)

Dado um Controlador P com $K_c = 1$, ajustado via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, obtém se $K_u = 2$.

Sendo assim, mantém-se $K_c = 1$, pois $K_u = 2$ corresponde ao limite de estabilidade, situação (não conservativa) para a qual qualquer alteração no processo controlado pode levar à instabilidade. Para $K_c > 2$, tem-se sistema instável.

IX.7)

Dados: "set-point" = $0,1 \text{ lb}_m/\text{ft}^3$;

$$C_c = 30 \text{ lb}_m/\text{ft}^3;$$

$$G_m = \frac{15-3}{0,15-0,05} e^{-0,5s} = 120e^{-0,5s};$$

$$G_f = \frac{0,005}{12};$$

Balço para o Tanque 1:

$$V \frac{dC_1}{dt} = F(C_i - C_1) \quad (1)$$

Balço para o Tanque 2:

$$V \frac{dC_2}{dt} = F(C_1 - C_2) + WC_c \quad (2)$$

Colocando as equações 1 e 2 em variáveis desvio e aplicando Transformada de Laplace, tem-se:

$$\frac{\bar{C}'_1(s)}{\bar{C}'_i(s)} = \frac{1}{(3s+1)} \quad (3)$$

$$\bar{C}'_2(s) = \frac{1}{(4s+1)} \bar{C}'_1(s) + \frac{30}{(4s+1)} \bar{W}(s) \quad (4)$$

Substituindo a eq.3 na eq.4, tem-se a seguinte função de transferência:

$$\bar{C}'_2(s) = \frac{1}{(4s+1)(3s+1)} \bar{C}'_1(s) + \frac{30}{(4s+1)} \bar{W}'(s) \quad (5)$$

Utilizando a eq.5, pode-se escrever que:

$$G_d = \frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{C}'_1(s)} = \frac{1}{(4s+1)(3s+1)} \quad (6)$$

$$G_p = \frac{\bar{C}'_2(s)}{\bar{W}'(s)} = \frac{30}{(4s+1)} \quad (7)$$

Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_r G_p G_m G_c = \frac{(4s+1)(1+0,25s) + 1,5K_c(1-0,25s)}{(4s+1)(1+0,25s)} = 0 \quad (8)$$

Da eq.8, tem-se que:

$$s^2 + (4,25 - 0,375K_c)s + 1 + 1,5K_c = 0 \quad (9)$$

Usando o a Arranjo de Routh para a eq.9, tem-se:

1	1	1 + 1,5K _c
2	4,25 - 0,375K _c	
3	1 + 1,5K _c	

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se que K_u = 11,33.

Ajustando o controlador P via de Ziegler & Nichols (*Tabela F*), obtém-se que $K_c = 5,7$

IX.8)

Dados: $G_p = G_d = \frac{1}{(s+1)^3}$ (7)

$$G_m = \frac{1}{(s+1)^2}; \quad G_f = 1; \quad G_c = K_c;$$

a) Para o sistema em questão, tem-se a seguinte Equação Característica :

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(s+1)^4 + K_c}{(s+1)^4} = 0 \quad (1)$$

Da eq.1, tem-se que:

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 + K_c = 0 \quad (2)$$

Usando o a Arranjo de Routh para a eq.2, tem-se:

1	1	6	$(1+K_c)$
2	4	4	0
3	5	$(1+K_c)$	
4	$(3,2 - 0,8K_c)$		
5	$(1+K_c)$		

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se que $K_u = 4$ e $\omega_u = 1$.

O valor de K_c para o qual duas das raízes estão sobre o eixo imaginário é $K_c = K_u = 4$.

b) Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se que as raízes sobre o eixo imaginário são: $s_1 = +i$ e $s_2 = -i$.

c) Fatorando o binômio $(s^2 + 1)$ do polinômio $(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 5)$, obtém-se:

$$(s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 5) = (s^2 + 1)(s^2 + 4s + 5)$$

Sendo portanto as duas outras raízes dadas por:

$$s_3 = -2 + i \quad \text{e} \quad s_4 = -2 - i$$

d)

O período último de oscilação é dado por: $T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = 6,28$.

e) Ajustando o controlador P via de Ziegler & Nichols (*Tabela P*), obtém-se $K_c = 2$.

f) Considerando o ajuste anterior ($K_c = 2$), para um degrau unitário no set-point, tem-se a seguinte expressão:

$$G_{sp} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^4 + 2} \quad (2)$$

Aplicando o Teorema do Valor Final à eq.2 e considerando um degrau unitário no set-point, tem-se que:

$$\text{offset} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

g) Analogamente, considerando o ajuste anterior ($K_c = 2$), para um degrau unitário na carga, tem-se a seguinte expressão:

$$G_{\text{carga}} = \frac{(s+1)}{(s+1)^4 + 2} \quad (3)$$

Aplicando o Teorema do Valor Final à eq.3 e considerando que não houve mudança no set-point, tem-se que:

$$\text{offset} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

h) Para que não haja offset, PI ou PID podem ser utilizados, mas como há ruído de medida, não se pode usar PID, pois a ação derivativa vai amplificar esses ruídos.

Ajustando então o PI via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, tem-se que $K_c = 1,8$ e $\tau_i = 5,23$.

IX.9)

Dados:

$$G_p = G_d = \frac{1}{(2s+1)} \quad (1)$$

$$G_m = \frac{1}{(s+1)} \quad (2)$$

$$G_c = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \quad (3)$$

$$G_f = 1;$$

a) Utilizando as equações 1, 2 e 3, pode-se escrever a Equação Característica do sistema, que é dada por:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{2s^2 + 3s + 1 + K_c(1 + 1/\tau_1 s)}{(2s + 1)(s + 1)} = 0 \quad (4)$$

Da eq.4 tem-se:

$$2\tau_1 s^3 + 3\tau_1 s^2 + (1 + K_c)\tau_1 s + K_c = 0 \quad (4a)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.4a, tem-se:

1	$2\tau_1$	$(1 + K_c)\tau_1$
2	$3\tau_1$	K_c
3	b_1	
4	K_c	

Onde: $b_1 = (1 + K_c)\tau_1 - \frac{2}{3}K_c$

Sabendo-se que, para que o sistema seja estável, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh devem ser maiores que zero, tem-se que para $K_c = 4$ e $\tau_1 = 0,5$, $b_1 = -0,17$, ou seja sistema instável.

b) Supondo agora que $G_f = \frac{1}{(0,1s + 1)}$, pode-se proceder o ajuste do controlador PI da seguinte maneira:

Considerando a Equação Característica dada pela expressão abaixo:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{0,2s^3 + 2,3s^2 + 3,1s + 1 + K_c}{(2s + 1)(s + 1)(0,1s + 1)} = 0 \quad (5)$$

Da eq.5 tem-se:

$$0,2s^3 + 2,3s^2 + 3,1s + 1 + K_c = 0 \quad (5a)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.5a, tem-se:

1	0,2	3,1
2	2,3	$(1 + K_c)$
3	b_1	
4	$(1 + K_c)$	

$$\text{Onde: } b_1 = 3,1 - \frac{0,2(1 + K_c)}{2,3}$$

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se que $K_c = 34,65$ e $\omega_s = 3,94$.

Ajustando então o PI via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, tem-se que $K_c = 15,6$ e $\tau_I = 1,33$.

IX.10)

Dados:

$$G_p = \frac{0,09}{(2s+1)(s+1)} \quad (1)$$

$$G_f = \frac{1}{(0,6s+1)} \quad (2)$$

$$G_m = e^{-0,4s} = \frac{1-0,2s}{1+0,2s} \quad (3)$$

$$G_c = K_c \quad (4)$$

a) Supondo inicialmente que $G_m = 1$, tem-se para o sistema a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{1,2s^3 + 3,8s^2 + 3,6s + 1 + 0,09K_c}{(2s+1)(s+1)(0,6s+1)} = 0 \quad (5)$$

Da eq.5 tem-se:

$$1,2s^3 + 3,8s^2 + 3,6s + 1 + 0,09K_c = 0 \quad (5a)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.5a, tem-se:

1	1,2	3,6
2	3,8	$(1 + 0,09K_c)$
3	b_1	
4	$(1 + 0,09K_c)$	

Onde: $b_1 = 3,6 - \frac{1,2(1 + 0,09K_c)}{3,8}$

Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh, tem-se que $K_u = 115,56$.

Ajustando então o controlador P via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, tem-se que $K_c = 57,8$.

b) Usando o ajuste para K_c obtido em a e considerando que G_m é dado pela eq.3, tem-se a seguinte Equação característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = \frac{(1,2s^3 + 3,8s^2 + 3,6s + 1)(1 + 0,2s) + 5,2 - 1,04s}{(2s+1)(s+1)(0,6s+1)(1 + 0,2s)} = 0 \quad (6)$$

Da eq.6 tem-se:

$$0,24s^4 + 1,76s^3 + 3,52s^2 + 2,76s + 6,2 = 0 \quad (6a)$$

Construindo o Arranjo de Routh para a eq.6a, tem-se:

1	0,24	3,52	6,2
2	1,76	2,76	
3	3,14		6,2
4	-0,715		
5	6,2		

Analisando então o Arranjo de Routh, verifica-se que neste caso o sistema é instável.

c) O tempo morto tende a instabilizar o processo em laço fechado.

IX.11)

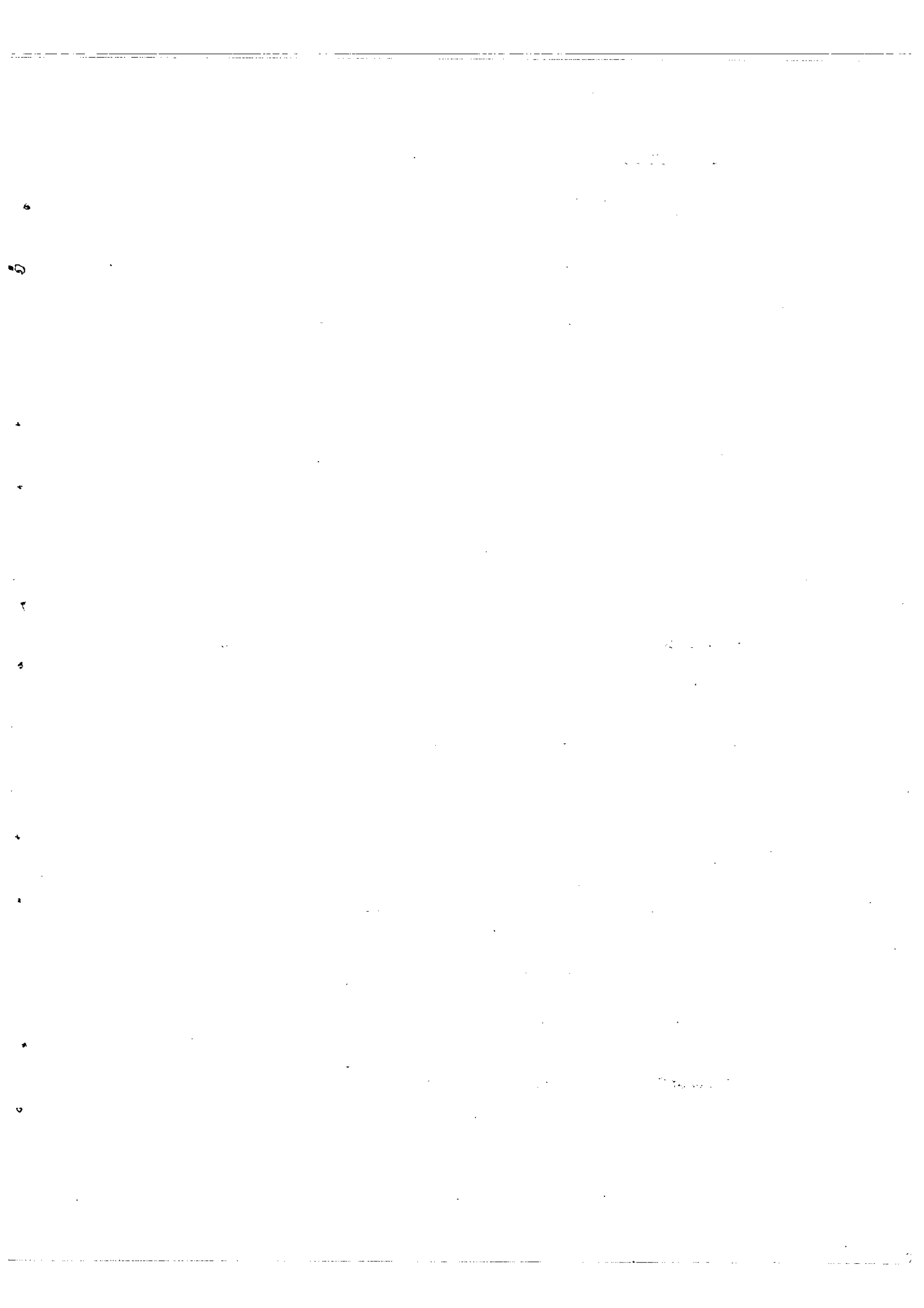
Dados:

$$G_p G_f = \frac{\bar{T}'(s)}{P'(s)} = \frac{40e^{-20s}}{(900s+1)(25s+1)} \quad (1)$$

$$G_m = 0,2 \text{ psi}^\circ\text{C} \quad (2)$$

$$G_c = K_c \quad (3)$$

Para este sistema, tem-se a seguinte Equação característica:



$$K_c = \frac{1}{2,25} \times \frac{73,7}{6,6} \left(0,9 + \frac{6,6}{12 \times 73,7} \right) = 4,5;$$

$$\tau_1 = 6,6 \frac{30 + 3(6,6/73,7)}{9 + 20(6,6/73,7)} = 18,5;$$

c)

$$1 + \frac{2,25K_c(1 - 3,3s)}{(73,7s + 1)(1 + 3,3s)} = 0$$

$$243,21s^2 + 77s + 1 - 7,425K_c s + 2,25K_c = 0$$

$$243,21s^2 + (77 - 7,425K_c)s + 1 + 2,25K_c = 0$$

Pelo Método da Substituição Direta, chega-se a:

$$K_u = 10,37; \quad \omega_u = 0,316 \quad T_u = 19,86;$$

Logo, $K_c = 4,7$ e $\tau_1 = 16,6$.

IX.13)

Da questão VIII.5, tem-se que:

$$G_p G_f G_m = \frac{2,25e^{-6,6s}}{73,7s + 1}$$

Usando as relações de projeto (*Tabela H*):

$$2,25K_c = 0,965 \left(\frac{6,6}{73,7} \right)^{-0,85} \quad \therefore K_c = 3,3$$

$$\frac{73,7}{\tau_1} = 0,796 - 0,1465 \left(\frac{6,6}{73,7} \right) \quad \therefore \tau_1 = 94,1$$

$$\frac{\tau_D}{73,7} = 0,308 \left(\frac{6,6}{73,7} \right)^{0,929} \quad \therefore \tau_D = 2,4$$

IX.14)

Dados: $\xi = 1,4$; $A_2 = 2 \text{ m}^2$;
 $R_1 + R_2 = 0,8$

$$R_2 = 0,3 \quad \therefore R_1 = 0,5$$

Assim, tem-se que:

$$\tau_{p_1} = A_1 R_1 = 0,5 A_1$$

$$\tau_{p_2} = A_2 R_2 = 0,6$$

Tem-se para este sistema que:

$$\xi = \frac{\tau_{p_1} + \tau_{p_2} + A_1 R_2}{2\sqrt{\tau_{p_1} \times \tau_{p_2}}} \quad (1)$$

Substituindo os valores respectivos da eq. 1, obtém-se:

$$2,8 = \frac{0,5A_1 + 0,6 + 0,3A_1}{\sqrt{0,6 \times 0,5A_1}} \quad (1a)$$

A eq. 1a pode ser escrita da seguinte maneira:

$$0,64A_1^2 - 1,392A_1 + 0,36 = 0 \quad (1b)$$

Para a eq. 1b duas soluções são possíveis:

$$A_1 = 1,875 \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad A_1 = 0,3 \text{ m}^2$$

A primeira solução será assumida doravante.

b)

$$G_p = \frac{\bar{h}'_2(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{30}{(5,625s^2 + 210s + 1)}$$

G_a não existe.

c) Sendo:

$$\frac{\bar{h}'_1(s)}{\bar{F}'_1(s)} = \frac{3.000s + 1}{(5,625s^2 + 210s + 1)} \quad (1)$$

Considerando então um degrau unitário na forma $\bar{F}'_1(s) = \frac{1}{s}$, tem-se a seguinte resposta:

$$h'_1(t) = 80 \left[1 - e^{-\frac{1,4t}{75}} (\cosh 0,013t + 1,429 \sinh 0,013t) \right] + \frac{3.000}{75} \frac{1}{0,980} e^{-\frac{1,4t}{75}} \sinh 0,013t$$

Para $h'_2(t)$, tem-se:

$$h'_1(t) = 30 \left[1 - e^{-\frac{1,4t}{75}} (\cosh 0,013t + 1,429 \sinh 0,013t) \right]$$

d) A Equação Característica é dada por:

$$1 - \frac{30K_c}{(5,625s^2 + 210s + 1)(0,2s + 1)} = 0 \quad (2)$$

Da eq.2, tem-se:

$$1,125s^3 + 5,667s^2 + 210,2s + 1 - 30K_c = 0 \quad (3)$$

Analisando o Arranjo de Routh da eq.3, tem-se:

1ª Regra: $K_c < 1/30$, para sistema estável.

2ª Regra:

1	1.125	210,2
2	5.667	$1 - 30K_c$
3	b_1	
4	c_1	

$$b_1 = \frac{1.125 - 33.750K_c - 1.191 \times 2034}{5.667}$$

$b_1 > 0$, para sistema estável.

Ou $K_c > -35,26$, como o controlador tem ação reversa, o limite inferior é $K_c > 0$.

$c_1 > 0$ leva a $K_c < 1/30$.

Em consequência, o intervalo de K_c para o qual o sistema é estável é:

$$0 < K_c < 1/30$$

e) Para ação direta $G_c = - (K_c)$, com $K_c > 0$.

A Equação Característica é dada por:

$$1.125s^3 + 5.667s^2 + 210,2s + 1 + 30K_c = 0$$

Analogamente ao item d, monta-se o Arranjo de Routh. No limite da estabilidade, b_1 deverá ser igual a zero, de modo que:

$$K_u = 35,3$$

f) $G_c = -17,6;$

g)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [h'_2(t)] = \frac{30K_c}{1 + 30K_c} \approx 1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y'_m(t)] = \frac{300K_c}{1 + 30K_c} \approx 10$$

“offset” = 1 - valor da variável medida ≈ 0 .

h) Direta, porque a faixa de ganhos que leva resposta estável é maior.

i) Para esse ajuste, torna-se necessário calcular T_u . Pela Regra Adicional do Arranjo de Routh:

$$5,667s^2 + 1,058,8 = 0$$

$$s = \pm 0,43i$$

Logo, $\omega_u = 0,43$ e $T_u = 14,5$.

Finalmente $G_c = -16,1; \tau_1 = 12,1$

IX.15)

Dados:

$$G_p = \frac{0,1}{18s^2 + 9s + 1} \quad (1)$$

$$G_m = \frac{1}{s+1} \quad (2)$$

$$G_c = K_c \quad e \quad G_f = 1$$

Para este sistema, tem-se a seguinte Equação Característica:

$$1 + G_f G_p G_m G_c = 1 + \frac{0,1K_c}{(s+1)(18s^2 + 9s + 1)} = 0 \quad (3)$$

Da eq.3 tem-se:

$$18s^3 + 27s^2 + 10s + 1 + 0,1K_c = 0 \quad (3a)$$

Pelo Método da Substituição Direta, utilizando a eq.3a, tem-se que:

$$-18\omega_u^3 + 10\omega_u = 0 \quad (4a)$$

$$-27\omega_u^2 + 1 + 0,1K_u \quad (4b)$$

Utilizando as eq.4a e eq.4b, tem-se que $K_u = 140$ e $\omega_u = 0,75$.

Ajustando então o PI via Ziegler & Nichols, utilizando a *Tabela F*, tem-se que $K_c = 63$ e $\tau_i = 7,0$.

IX.16)

Dados: G_p e G_m conforme a questão IX.15.

$$G_f = \frac{10}{1,2s + 1}$$

$$G_c = 63 \left(\frac{7s + 1}{7s} \right)$$

Logo, a Equação Característica é dada por:

$$1 + \frac{63(7s+1)}{(18s^3 + 27s^2 + 10s + 1)(1,2s + 1)7s} = 0 \quad (1)$$

Da eq.1, tem-se:

$$151,2s^5 + 352,8s^4 + 273s^3 + 78,4s^2 + 448s + 63 = 0 \quad (2)$$

Analisando o Arranjo de Routh da eq.2, tem-se:

1ª Regra: satisfeita

2ª Regra:

1	151,2	273	448
2	352,8	78,4	63
3	239,4		421
4	-542,02		

O sistema é instável, já que o elemento da linha quatro é negativo.

CAPÍTULO X: ANÁLISE E RESPOSTA DE FREQUÊNCIA DE
PROCESSOS LINEARES

até o final

X.1)

a) $V \frac{dC_1}{dt} = qC_0 - qC_1 - k_1 C_1 V$ (1)

$$V \frac{dC_2}{dt} = qC_1 - qC_2 - kC_2 V$$
 (2)

$$V \frac{dC_3}{dt} = qC_2 - qC_3 - kC_3 V$$
 (3)

b) Linearizando o termo não linear:

$$k_1 C_1 \approx kC_{1,e} + k(C_1 - C_{1,e}) + C_{1,e}(k_1 - k)$$
 (4)

Definindo as variáveis - desvio:

$$\left. \begin{aligned} k_1' &= k_1 - k \\ C_0' &= C_0 - C_{0,e} \\ \vdots & \\ C_3' &= C_3 - C_{3,e} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A equação (1) pode ser, então, reescrita:

$$V \frac{dC_1'}{dt} = qC_0' - qC_1' - V k C_1' - C_{1,e} k_1' V$$

Aplicando Transformada de Laplace chega-se a:

$$[Vs + (kV + q)] \overline{C_1'}(s) = q\overline{C_0}' - C_{1,e} \overline{k_1}' V$$

Para as eq.2 e eq.3, tem-se:

$$V \frac{dC_i'}{dt} = qC_{i-1}' - qC_i' - kV C_i' \quad i = 2,3$$

$$\frac{\bar{C}_i'(s)}{\bar{C}_{i-1}'(s)} = \frac{q/(q+kV)}{\frac{V}{q+kV} s+1}$$

Assim:

$$G_p(s) = \frac{\bar{C}_3'(s)}{\bar{C}_0'(s)} = \frac{\bar{C}_3'(s)}{\bar{C}_2'(s)} \times \frac{\bar{C}_2'(s)}{\bar{C}_1'(s)} \times \frac{\bar{C}_1'(s)}{\bar{C}_0'(s)} = \frac{-(VC_{1,e})/(q+kV)}{\left(\frac{V}{q+kV} s+1\right)^3} [q/(q+kV)]^2$$

$$G_p(s) = \frac{-0,015}{(0,19s+1)^3}$$

onde $C_{1,e} = \frac{q}{q+k_1V} C_{0,e} = 0,094$;

$$G_d(s) = \frac{\bar{C}_3'(s)}{\bar{C}_0'(s)} = \frac{[q/(q+kV)]^3}{\left(\frac{V}{q+kV} s+1\right)^3} = \frac{0,83}{(0,19s+1)^3}$$

c)

OBS.: O ENUNCIADO DE "SEM PROBLEMAS" DEVERÁ SER CORRIGIDO. ASSIM, CONSIDERAR VÁLVULA ATC., OU SEJA $G_f = -1$, PARA QUE O SISTEMA NÃO SEJA INERENTEMENTE INSTÁVEL.

$G_m = 1$; $G_f = -1$; $G_c = K_c$. Logo:

$$G_{LA} = G_c G_f G_p G_m = \frac{0,015}{(0,19s + 1)^3} K_c$$

onde o subscrito LA indica laço aberto.

Logo,

$$\frac{RA}{0,015K_c} = \left[\frac{1}{\sqrt{(0,19\omega)^2 + 1}} \right]^3$$

$$\phi = 3 \tan^{-1}(-\omega_{c_0} \cdot 0,19)$$

Para $\phi = -\pi$:

$$\tan -\frac{\pi}{3} = -1,73 = -\omega_{c_0} \cdot 0,19 \quad \therefore \omega_{c_0} = 9,1$$

d)

$$RA = 0,015 \cdot 100 \cdot 0,125 = 0,188 < 1$$

Logo, o sistema é ESTÁVEL.

X.2)

A frequência de ressonância é dada por:

$$\omega_r = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{\tau}$$

Matematicamente, se $\omega_r \in \mathfrak{R} (\omega_r \neq 0)$, então:

$$1 - 2\xi^2 > 0$$

$$-2\xi^2 > -1$$

$$2\xi^2 < 1$$

$$\xi^2 < \frac{1}{2}$$

$$0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para nenhum dos sistemas apresentados se observa a ressonância.

X.3)

$$a) \quad A \frac{dh}{dt} = F_i - F_s$$

$$A \frac{dh'}{dt} = F_i' - F_s' = F_i' - Kh'$$

$$(As + K)\bar{h}'(s) = \bar{F}_i'(s)$$

Logo,

$$\frac{\bar{h}'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{1/K}{\left(\frac{A}{K}s + 1\right)}$$

b) Como $F_s' = Kh'$:

$$\frac{\bar{F}_s'(s)}{\bar{F}_i'(s)} = \frac{1}{\left(\frac{A}{K}s + 1\right)}$$

Com $\frac{A}{K} = \tau p$.

Assim,

$$RA = 0,1 = \frac{1}{[(\omega\tau)^2 + 1]^{\frac{1}{2}}}$$

$$(\omega\tau)^2 + 1 = 100$$

$$\omega\tau = \sqrt{99}$$

$$\frac{\omega}{K} A = \sqrt{99}$$

$$A = \sqrt{99} \frac{\omega}{K}$$

X.4)

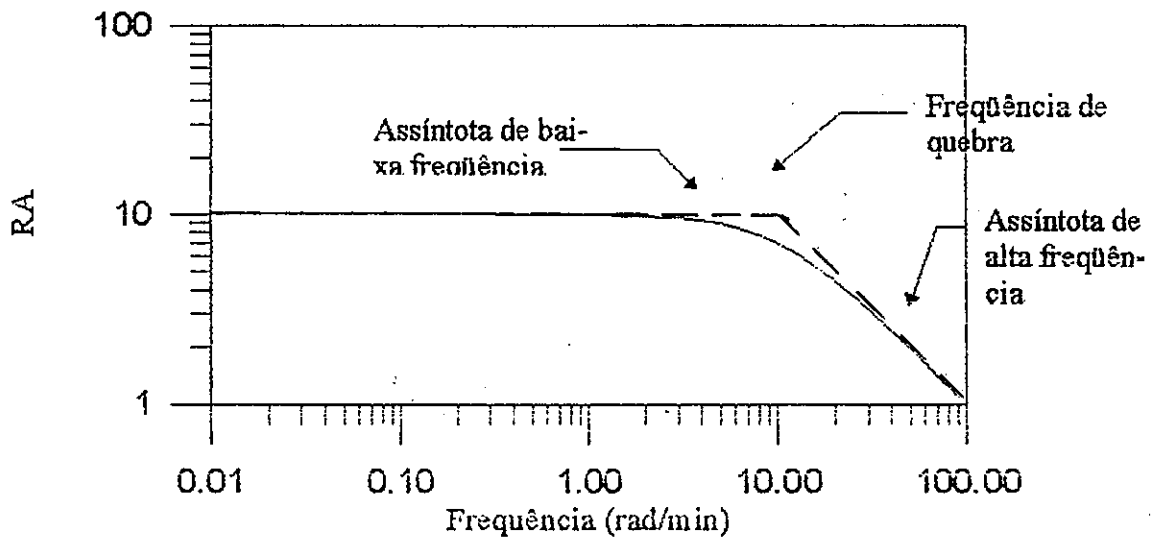


Figura X.4

a) 1ª ordem, porque a assíntota de alta frequência (Vide Figura X.4) tem inclinação -1 e o ângulo de fase varia de 0 a -90°;

b) Não, se houvesse tempo morto a fase cresceria sem limite, quando a frequência fosse a infinito;

c) A frequência de quebra é (Vide Figura X.4) $\omega_q = 10$, logo $\tau_p = \frac{1}{\omega_q} = 0,1$.
 $K_p = 10$ (Vide assíntota de baixa frequência).

X.5)

a) $d = 0,65$. Projeta-se para o pior caso (maior tendência à instabilidade).

b) $\phi = -\pi = \tan^{-1} - 2\omega_{c_0} - 0,65\omega_{c_0}$

$$\omega_{c_0} \approx 2,7$$

Para este valor de ω_{c_0} :

$$RA = \frac{K_c \cdot 2}{[(5,4)^2 + 1]^{1/2}}$$

$$\frac{RA}{K_c} = 0,37$$

Para $RA = 1 \therefore K_u = 2,7$

K_c (Z & N) = 1,4

c)

$$G = \frac{2K_c(1 - 0,325s)}{(2s + 1)(1 + 0,325s)} = 0 \quad (1)$$

Da eq. 1, tem-se:

$$0,65s^2 + (2,325 - 0,65K_c)s + 1 + 2K_c = 0 \quad (1a)$$

Pelo Método da Substituição Direta:

$$\begin{cases} -0,65\omega_u^2 + i + 2K_u = 0 \\ (2,325 - 0,65K_u)\omega_u = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtém-se que $K_u = 3,6$ e $\omega_u = \sqrt{12,5}$.

Assim, $K_c (Z \& N) = 1,8$.

a) O resultado do item b que não considera a aproximação de Padé e é o mais conservativo dos dois.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Process Dynamics and Control. Seborg, Edgar and Mellichamp. Wyley Series in Chemical Engineering, 1989.
2. Chemical Process Control, An Introduction to Theory and Practice. Stephanopoulos. Prentice-Hall, 1984.
3. Process Systems Analysis and Control. 2nd Ed. Coughanowr. McGraw-Hill International Editions, 1991.
4. Análise e Controle de Processos Químicos. Coughanowr e Koppel. Editora Guanabara, 1978.
5. Principles and Practice of Automatic Process Control. Smith and Corripio. John Wylie and Sons, 1985.
6. Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers. 2nd Ed. Luyben. McGraw-Hill, 1990.
7. Process Dynamics and Control. Douglas. Volumes 1 e 2. Prentice-Hall, Inc, 1972.
8. Controle Automático de Processos Industriais, Instrumentação. 2^a Ed. Sighieri e Nishinari. Editora Edgard Blucher Ltda, 1973.
9. Manual de Engenharia Química, Perry e Chilton, Guanabara Dois.
10. Sem Problemas: Cem Problemas de Controle de Processos. Souza Jr.. Imprensa Universitária da UFRRJ, 1995.

APÊNDICE I

TABELA A - RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 2ª ORDEM A UMA PERTURBAÇÃO DEGRAU DE MAGNITUDE B.

ξ	Resposta de um sistema de 2ª ordem a um degrau de magnitude B	
$\xi > 1$	$Y'(t) = BK_p \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left[\cosh\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right) \frac{t}{\tau} + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right) \frac{t}{\tau} \right] \right\}$	(eq.a1)
$\xi = 1$	$Y'(t) = BK_p \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$	(eq.a2)
$\xi < 1$	$Y'(t) = B K_p \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\frac{t}{\tau}} \operatorname{sen}(\alpha t + \phi) \right]$	(eq.a3)

TABELA B - RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 2ª ORDEM A UMA PERTURBAÇÃO IMPULSO DE MAGNITUDE B

ξ	Resposta de um sistema de 2ª ordem a um impulso de magnitude B	
$\xi > 1$	$Y'(t) = \frac{BK_p}{\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh\left(\sqrt{\xi^2 - 1}\right) \frac{t}{\tau} \right)$	(eq.b1)
$\xi = 1$	$Y'(t) = BK_p \left(\frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$	(eq.b2)
$\xi < 1$	$Y'(t) = B K_p \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} t\right) \right]$	(eq.b3)

TABELA C - FORMULÁRIO

$\omega = \frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\tau}$	(eq. c1)
$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{(1-\xi^2)}}{\xi} \right]$	(eq. c2)
$T_d = \frac{\pi - \phi}{\omega}$	(eq. c3)
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	(eq. c4)
$\tau = \sqrt{\tau p_1 \times \tau p_2}$	(eq. c5)
$\xi = \frac{\tau p_1 + \tau p_2}{2\sqrt{\tau p_1 \times \tau p_2}}$	(eq. c6)
$OS = \exp \left[\frac{-\pi\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)}} \right]$	(eq. c7)

TABELA D - PARÂMETROS REFERENTES A UM SISTEMA DE 1ª ORDEM ($G_m = G_f = 1$) CONTROLADO POR UM CONTROLADOR P

$K_p' = \frac{K_p K_c}{1 + K_p K_c}$	(eq. d1)
$\tau_p' = \frac{\tau_p}{1 + K_p K_c}$	(eq. d2)
$K_d' = \frac{K_d}{1 + K_p K_c}$	(eq. d3)

TABELA E - PARÂMETROS REFERENTES A UM SISTEMA DE 2ª ORDEM ($G_m = G_f = 1$) CONTROLADO POR UM CONTROLADOR P

$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 + K_p K_c}}$	(eq. e1)
$\xi' = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_p K_c}}$	(eq. e2)

TABELA F - AJUSTE VIA ZIEGLER & NICHOLS

Controlador	K_c	τ_i	τ_D
P	$0,5K_u$	—	—
PI	$0,45K_u$	$T_u/1,2$	—
PID	$0,6K_u$	$T_u/2$	$T_u/8$

TABELA G - AJUSTE VIA COHEN & COON

Controlador	K_c	τ_i	τ_D
P	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[1 + \frac{\theta}{3\tau} \right]$	—	—
PI	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[0,9 + \frac{\theta}{12\tau} \right]$	$\frac{\theta [30 + 3(\theta/\tau)]}{9 + 20(\theta/\tau)}$	—
PID	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{(16\tau + 3\theta)}{12\tau} \right]$	$\frac{\theta [32 + 6(\theta/\tau)]}{13 + 8(\theta/\tau)}$	$\frac{4\theta}{11 + 2(\theta/\tau)}$

TABELA H - RELAÇÕES DE PROJETO PARA CONTROLADORES BASEADAS NO ÍNDICE DE DESEMPENHO ITAE E NUM MODELO DE 1ª ORDEM COM TEMPO MORTO^a

Tipo de Entrada	Tipo de Controlador	Modo	A	B
Carga	PI	P	0,859	-0,977
		I	0,674	-0,680
Carga	PID	P	1,357	-0,947
		I	0,842	-0,738
		D	0,381	0,995
Set-point	PI	P	0,586	-0,916
		I	1,03 ^b	-0,165 ^b
Set-point	PID	P	0,965	-0,85
		I	0,796 ^b	-0,1465 ^b
		D	0,308	0,929

^aRelação de Projeto: $Y = A \left(\frac{\theta}{\tau} \right)^B$ onde $Y = KK_c$ para o modo proporcional, $\frac{\tau}{\tau_i}$ para o modo integral e $\frac{\tau_D}{\tau}$ para o modo derivativo.

^bPara mudanças no set-point, a Relação de Projeto para o modo integral é $\frac{\tau}{\tau_i} = A + B(\theta/\tau)$.

APÊNDICE II

RESPOSTA DE UM SISTEMA DE 2ª ORDEM A UMA PERTURBAÇÃO DEGRAU DE MAGNITUDE B.

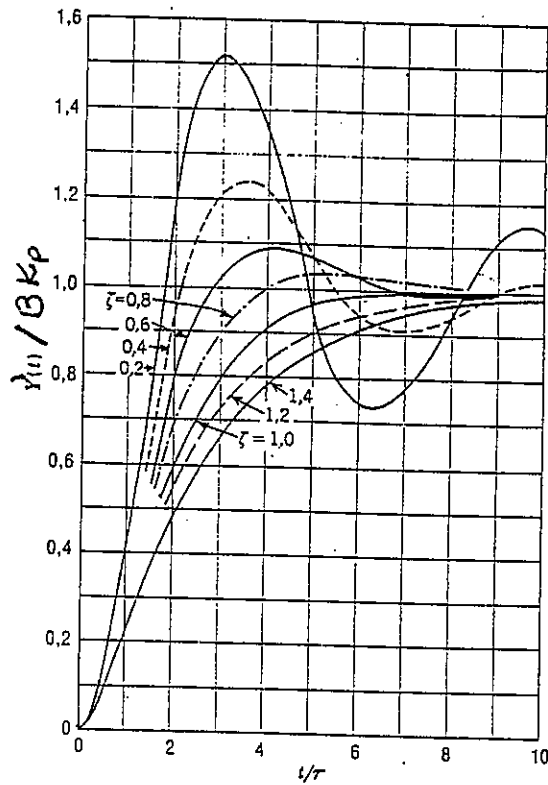


Figura A1

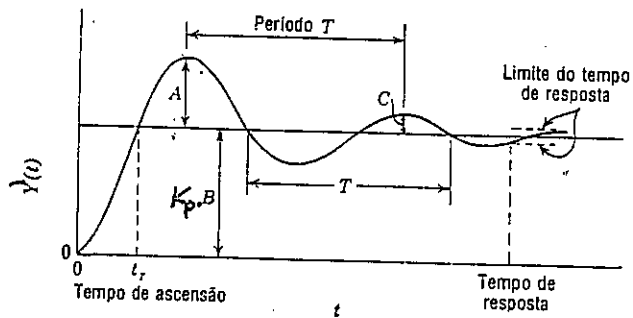


Figura A2